2. STIRLINGOVA ŠTEVILA

Za $0 \le k \le n$ je <u>Stirlingovo število druge vrste</u> $S(n,k)$ število razbitij n-množice v k nepraznih razredov.

<u>Opombe</u>:
- $S(0,0)=1$; $S(0,k)=0$, $k \ge 1$; $S(n,1)=1$, $n \ge 1$.
- druga standardna oznaka: $\left\{ n \atop k \right\}$.

4

<u>Štetje funkcij</u>: naj bosta N, R množici z $|N|=n$ in $|R|=r$. Nadalje:

$$Map(N,R) = \{f: N \to R\}$$
$$Inj(N,R) = \{f: N \to R \text{ injektivna}\}$$
$$Surj(N,R) = \{f: N \to R \text{ surjektivna}\}.$$

Tedaj imamo:

$$|Map(N,R)| = r^n$$
$$|Inj(N,R)| = r^{\underline{n}}$$
$$|Surj(N,R)| = r!\, S(n,r) \quad \text{... razloži sveda...}$$

<u>**IZREK**</u> $$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, x^{\underline{k}}.$$

<u>Dokaz</u>. Vse funkcije razbijemo glede na velikost slike. Na sliki je funkcija seveda surjektivna, zato imamo:

$$r^n = |Map(N,R)| = \sum_{A \subseteq R} |\{f : f(N)=A\}| = \sum_{A \subseteq R} |Surj(N,A)| = \sum_{k=0}^{r} \sum_{|A|=k} |Surj(N,A)|$$
$$= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} k!\, S(n,k)$$
$$= \sum_{k=0}^{r} S(n,k)\, r^{\underline{k}}.$$

Uporabimo še polinomsko metodo in dobimo rezultat za vsak x. Pri tem lahko seštevanje ustavimo pri n, saj je $S(n,k)=0$ za $k>n$. $\square$

Polinomska zaporedja

Polinomsko zaporedje je zaporedje polinomov (nad $\mathbb{C}$) $(p_n(x))_{n=0}^{\infty}$, tako da je $\deg p_n(x)=n$.
Vsako tako zaporedje je baza vektorskega prostora vseh polinomov. Če imamo dve polinomski zaporedji

$$(p_n(x)) \quad \text{in} \quad (q_n(x))$$

tedaj lahko razvijemo eno po drugih:

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, q_k(x) \qquad \text{in} \qquad q_n(x)=\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\, p_k(x).$$

Številom $a_{n,k}$ in $b_{n,k}$ pravimo povezovalni koeficienti med zaporedjema $(p_n(x))$ in $(q_n(x))$.

- Če zapišemo matriki $(a_{n,k})$ in $(b_{n,k})$ sta to [illegible], spodnji trikotni matriki.

Zveza $x^n=\sum_{k=0}^{n} S(n,k)\, x^{\underline{k}}$ torej pravi, da so $S(n,k)$ povezovalni koeficienti za polinomski zaporedji (x^n) in $(x^{\underline{n}})$. Uporabimo to dejstvo za algebraični dokaz tele znane rekurzije:

TRDITEV. $S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\cdot S(n-1,k)$ $\quad (n\geq 1)$.

Dokaz. Najprej izračunajmo: $x^{\underline{k+1}}=x^{\underline{k}}(x-k)=x\cdot x^{\underline{k}}-k\cdot x^{\underline{k}} \Rightarrow$

$$x\cdot x^{\underline{k}}=x^{\underline{k+1}}+k\cdot x^{\underline{k}}. \qquad (*)$$

Sedaj:

$$x^n=x\cdot x^{n-1}\overset{\text{Izrek 2.1}}{=}x\sum_k S(n-1,k)\,x^{\underline{k}}=\sum_k S(n-1,k)\cdot\left(x\cdot x^{\underline{k}}\right)\overset{(*)}{=}$$

$$=\sum_k S(n-1,k)\,x^{\underline{k+1}}+\sum_k k\cdot S(n-1,k)\cdot x^{\underline{k}}$$

$$=\sum_k S(n-1,k-1)\,x^{\underline{k}}+\sum_k k\cdot S(n-1,k)\,x^{\underline{k}}\overset{\text{Izrek 2.1}}{=}\sum_k S(n,k)\,x^{\underline{k}}.$$

zamik indeksa

$\square$

Stirlingova matrika druge vrste 1

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

jasno

jasno

$S(n,n-1) = \binom{n}{2}$ jasno.

$S(n,2)$: $\dfrac{2^n - 2}{2}$ ← neprazni množici, ← razbitje 2× ✓

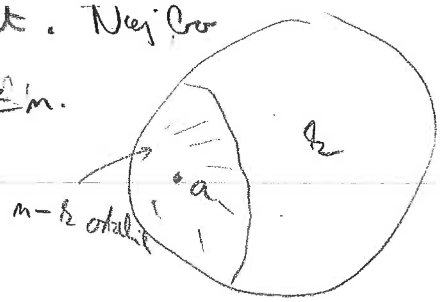
Bellova števila

Def. $\mathrm{Bell}(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$, $n \geq 1$; $\mathrm{Bell}(0) = 1$.

Torej število vseh možnih razbitij.

TRDITEV. $\mathrm{Bell}(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Bell}(k)$.

Dokaz. Naj bo $|N| = n+1$ in $a \in N$ fiksen elt. Naj bo elt., ki niso v istem kosu, v katerem je a, enako k. Torej $0 \leq k \leq n$.



$$\Rightarrow \mathrm{Bell}(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \mathrm{Bell}(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{Bell}(k).$$

□

STIRLINGOVA ŠTEVILA PRVE VRSTE

N množica, tedaj naj bo

$S(N)$ množica vseh permutacij N.

V posebnem:

$S(n) = S([n])$.

<u>Def.</u> <u>Stirlingovo število prve vrste</u> $s(n,k)$ je število permutacij n-množice s k cikli, $n \geq 1$. Nadalje $s(0,0)=1$; $s(0,k)=0$, $k \geq 1$.

- opomba: $\left[{n \atop k}\right]$ je druga standardna oznaka.

<u>TRDITEV.</u> $s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)\cdot s(n-1,k)$.

<u>Dokaz.</u> Naj bo $a \in N$, $|N|=n$. $S(N)$ razbije v permutacije, ki imajo negibno točko (a) in ostale permutacije.... $\square$

<u>IZREK</u> (i) $$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)\, x^k.$$

(ii) $$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k)\, x^k.$$

<u>Dokaz.</u> (i) Najprej izračunamo:

$$x^{\overline{n}} = x^{\overline{n-1}}(x+n-1) = x\cdot x^{\overline{n-1}} + (n-1)\, x^{\overline{n-1}}$$

Odtod z indukcijo dobimo:

$$x^{\overline{n}} = x\cdot \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)\, x^{k-1} + (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)\, x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} s(n-1,k-1)\, x^k + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1)\, s(n-1,k)\, x^k$$

$$\overset{\text{Trditev}}{=} \sum_{k\geq 0} s(n,k)\, x^k.$$

zakon vzajemnosti:
$$(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k x^{\overline{k}}$$
$$(-x)^{\overline{k}} = (-1)^k x^{\underline{k}}$$

(ii) zakon vzajemnosti $\Rightarrow$ $$x^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}} \overset{(i)}{=} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-x)^k$$ $\square$

$$!\,(-1)^{n+k} = (-1)^{n-k}\,!$$

Stirlingova matrika prve vrste

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	2	3	1				
4	0	6	11	6	1			
5	0	24	50	35	10	1		
6	0	120	274	225	85	15	1	
7	0	720	$\boxed{}$					

jasno: $s(n,n)=1$ (id)

jasno: ena transpozicija $\Rightarrow \binom{n}{2}$.

$120+6\cdot 274=1764$

$s(n,1)=(n-1)!$ ... ravno ciklične permutacije

$s(n,2)=?$ (tevj stolpec pri $k=2$).

$$s(n,2)=s(n-1,1)+(n-1)s(n-1,2)$$
$$=(n-2)!+(n-1)s(n-1,2) \qquad \Big| : (n-1)!$$

$$\frac{s(n,2)}{(n-1)!}=\frac{s(n-1,2)}{(n-2)!}+\frac{1}{n-1}$$
$$= \dots$$
$$=\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\dots+\frac{1}{1}=H_{n-1} \qquad (H_n \dots n\text{-to harmonično število}).$$

$$\Rightarrow \boxed{s(n,2)=(n-1)!\cdot H_{n-1}}$$