10. TUTTEOV POLINOM

Doslej smo vedno računali polinome, katerih koeficienti so imeli kombinatorični pomen, kot na primer $\sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^k$. Sedaj pa pojdimo z druge strani: recimo, da imamo zaporedje $a_0, a_1, a_2, \ldots$ in želimo določiti polinom (ali splošneje neko funkcijo) f, tako da je

$$f(i)=a_i.$$

Skratka, želimo si polinom, katerega vrednosti so nekaj "pametnega".

Najprej si poglejmo:

KROMATIČNI POLINOM

- i-barvanje grafa $G=(V,E)$ je preslikava $c: V\to[i]$: $xy\in E \Rightarrow c(x)\neq c(y)$.
- G graf, lahko z zankami in večkratnimi povezavami. Tedaj postavimo:

$$\chi_G(i) = \#\ i\text{-barvanj grafa } G.$$

Primera: $\chi_{P_n}(i) = i(i-1)^{n-1}$; splošneje, če je T drevo z n vozlišči: $\chi_T(i)=i(i-1)^{n-1}$.

$$\chi_{K_n}(i) = i^n$$

Tedaj sta ustrezni kromatični funkciji:

$$\chi_{P_n}(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^{n-1} \quad \text{in} \quad \chi_{K_n}(i)=\lambda^n.$$

Obe sta polinoma stopnje n; da vedno dobimo polinom, bomo videli kasneje.

Zato $\chi_G(\lambda)$ imenujemo kromatični polinom grafa G.

- $\chi(G)$ je najmanjši k, tako da je $\chi_G(k)>0$.

- most ... povezava, ki če jo odstranimo, naredi komponento, v kateri je, nepovezano.
- $k(G)$ = # komponent grafa G
- $G-e$ ... graf, ki ga dobimo iz G z odstranitvijo povezave e
- G/e ... kontrakcija po e:  Primer:  G/e.

Opomba: – Če ima G zanko, je $\chi_G(\lambda)=0$

– Če je G disjunktna unija G_1 in G_2, je $\chi_G(\lambda)=\chi_{G_1}(\lambda)\cdot\chi_{G_2}(\lambda)$.

TRDITEV. Naj bo G graf in e njegova povezava, ki ni zanka. Tedaj velja:

$$\chi_G(\lambda)=\chi_{G-e}(\lambda)-\chi_{G/e}(\lambda).$$

Dokaz. Opazujmo $\chi_{G-e}(\lambda)$: naj bo $e=uv$ in c barvanje $G-e$. Tedaj je bodisi

(i) $c(u)\neq c(v)$: to ustreza barvanju G; in obratno

(ii) $c(u)=c(v)$: to ustreza barvanju G/e; in obratno.

Zato je

$$\chi_{G-e}(\lambda)=\chi_G(\lambda)+\chi_{G/e}(\lambda).$$

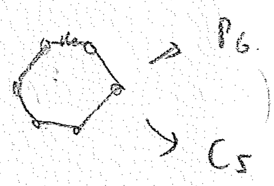
□

Primer 1 $\chi_{C_n}(\lambda)=(\lambda-1)^n+(-1)^n(\lambda-1)$

$n=2$:  C_2 ; $\chi_{C_2}(\lambda)=\lambda\cdot(\lambda-1)$

formula: $(\lambda-1)^2+(\lambda-1)=(\lambda-1)\cdot\lambda$ ✓

$n-1\to n$: $\chi_{C_n}(\lambda)=\chi_{P_n}(\lambda)-\chi_{C_{n-1}}(\lambda)$

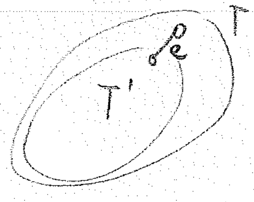


$$\overset{\text{ind.}}{=}\lambda(\lambda-1)^{n-1}-(\lambda-1)^{n-1}-(-1)^{n-1}(\lambda-1)$$

$$=(\lambda-1)^{n-1}(\lambda-1)-(-1)^{n-1}(\lambda-1)$$

$$=(\lambda-1)^n+(-1)^n(\lambda-1).$$

Primer 2. T drevo z n vozlišči.



$$\chi_T(\lambda)=\chi_{T-e}(\lambda)-\chi_{T/e}(\lambda)$$

$$=\chi_{K_1}(\lambda)\cdot\chi_{T'}(\lambda)-\chi_{T'}(\lambda)=\chi_{T'}(\lambda)\cdot(\lambda-1)$$

$$=\dots=\chi_{K_1}(\lambda)\cdot(\lambda-1)^{n-1}=\lambda\cdot(\lambda-1)^{n-1}.$$

TRDITEV. Naj bo G graf brez zank. Tedaj je $\chi_G(\lambda)$ polinom stopnje $n = |V(G)|$. Nadalje, če je $\chi_G(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$, tedaj so koeficienti $a_0, a_1, \ldots, a_{n-k(G)}$ neničelni z alternirajočimi predznaki, kjer je $a_0 = 1$ in $a_i = 0$ za vse $i > n-k(G)$.

Dokaz. (indukcija po $|E(G)|$.)

Baza indukcije: $|E| = 0$: $\chi_{\overline{K_n}}(\lambda) = \lambda^n$ ... veljajo vse trditve.

indukcijski korak: naj bo $e \in E$. Tedaj je

$$\chi_G(\lambda) = \chi_{G-e}(\lambda) - \chi_{G/e}(\lambda)$$

Po ind. predpostavki: $\chi_{G-e}(\lambda)$ stopnje n & vse ostalo

$\chi_{G/e}(\lambda)$ stopnje $n-1$ & vse ostalo.

Potem pa je $\chi_G(\lambda)$:

$$\begin{array}{rll} & 1\cdot\lambda^n - \cdot\lambda^{n-1} + \ldots \ \ldots & \ldots \chi_{G-e} \\ -(& 1\lambda^{n-1} - \ldots\ ) & \ldots \chi_{G/e} \\ \hline & 1\cdot\lambda^n - \cdot\lambda^{n-1} + \ldots & \end{array}$$

$\square$

Vpeljimo sedaj Tuttov polinom, ki naravno posploši kromatični polinom in še številne druge polinome.

Def. Tutteov polinom $T_G(x,y)$ grafa $G = (V,E)$ je rekurzivno definiran takole:

(i) Če je $E = \emptyset$, tedaj je $T_G(x,y) = 1$

(ii) Če je e most, tedaj je $T_G(x,y) = x \cdot T_{G-e}(x,y)$

(iii) Če je e zanka, tedaj je $T_G(x,y) = y \cdot T_{G-e}(x,y)$

(iv) Če e ni niti most niti zanka, tedaj je

$$T_G(x,y) = T_{G-e}(x,y) + T_{G/e}(x,y).$$

Opomba: na prvi pogled izgleda, da definicija: različna zaporedja povezav bi načeloma lahko privedla do različnih polinomov. Kmalu bomo videli, da temu ni tako.

Primer. $T_{P_3}(x,y) = x\,T_{\circ\circ\circ}(x,y) = x^2 \cdot \underbrace{T_{\circ\circ\circ}(x,y)}_{=1} = x^2$

Splošneje: če je T drevo na m povezavah, tedaj je $T_T(x,y) = x^m$.

$$T_{K_3}(x,y) = T_{P_3}(x,y) + T_{C_2}(x,y) = x^2 + T_{P_2}(x,y) + T_{\circlearrowleft}(x,y) = x^2 + x + y$$

$$T_{C_4}(x,y) = T_{P_4}(x,y) + T_{K_3}(x,y) = x^3 + x^2 + x + y.$$

Lotimo se sedaj dobre definiranosti Tuttovega polinoma.

Def. Naj bo $G = (V,E)$ graf in $A \subseteq E$. Tedaj je rang od A, $r(A)$, definiran takole:

$$r(A) = |V| - k((V,A)).$$

Z besedami, rang je torej $|V|$ manj število komponent vpetega podgrafa na povezavah A.

- Očitno je $0 \le r(A) \le |A|$.
- $r(A) = 0 \iff A = \emptyset$
- $r(A) = |A| \iff A$ inducira vpet gozd. (VAJE)
- $r(E) = |V| - k(G)$. Poenostavimo: $r(G) = r(E)$.
- $A \subseteq B \Rightarrow r(A) \le r(B)$.

Def. (Rang-rodovna funkcija grafa). Naj bo $G = (V,E)$ graf. Tedaj je

$$R_G(x,y) = \sum_{A \subseteq E} x^{r(G)-r(A)}\, y^{|A|-r(A)}.$$

Primer. $G = C_4$: $r(G) = 4-1 = 3$ (v splošnem, če je G povezan, je $r(G) = |V| - 1$.)

$A = E$: $r(A) = r(G) = 3$: $x^{3-3} \cdot y^{4-3} = y$

$A =$: $r(A) = 3$: $4 \cdot x^{3-3} \cdot y^{3-3} = 4$

$A =$: $r(A) = 2$: $4 \cdot x^{3-2} \cdot y^{2-2} = 4x$

A : $r(A) = 2$: $2 \cdot x^{3-2} \cdot y^{2-2} = 2x$

A : $r(A) = 1$: $4 \cdot x^{3-1} \cdot y^{1-1} = 4x^2$

A : $r(A) = 0$: $x^{3-0} \cdot y^{0-0} = x^3$

$$R_{C_4}(x,y) = x^3 + 4x^2 + 6x + 4 + y$$

Naslednji izrek zagotavlja, da je Tutteov polinom dobro definiran.

IZREK. Za vsak graf G velja:

$$T_G(x,y) = R_G(x-1,y-1).$$

Dokaz. Pišimo R_G v spremenljivkah u,v: $R_G(u,v)$. Dokazati želimo, da R_G zadošča rekurzijam iz definicije T_G za $x=u+1$ in $y=v+1$, torej:

(i) Če je $E=\emptyset$, tedaj $R_G(u,v)=1$.

(ii) Če je e most, tedaj je $R_G(u,v) = (u+1)R_{G/e}(u,v)$

(iii) Če je e zanka, tedaj je $R_G(u,v) = (v+1)R_{G-e}(u,v)$

(iv) Če e ni niti most niti zanka, tedaj je $R_G(u,v) = R_{G-e}(u,v) + R_{G/e}(u,v)$.

Z indukcijo potem sledi, da je $T_G(x,y)$ izračun $R_G(u,v)$ pri $u=x-1$ in $v=y-1$. Zato je Tutteov polinom enolično določen.

(i) očitno velja, dokazi (ii), (iii), (iv) so podobni, poglejmo si (ii):

Naj bo e most in naj bo r' funkcija ranga množic $A-e$ v grafu $G-e$. Tedaj je

$$r'(A-e) = |V(G-e)| - k((V,A-e)) = |V| - (k(V,A)+1)$$
$$= (|V| - k((V,A))) - 1 = r(A) - 1.$$

V posebnem: $r'(G-e) = r(G) - 1$

Tedaj imamo:

$$R_G(u,v) = \sum_{A\subseteq E-e} u^{r(G)-r(A)} \cdot v^{|A|-r(A)} + \sum_{A:\, e\in A} u^{r(G)-r(A)} \cdot v^{|A|-r(A)}$$

A je že brez e!

$$= \sum_{A\subseteq E-e} u^{(r'(G-e)+1)-r'(A)} \cdot v^{|A|-r'(A)} + \sum_{B=A-e} u^{(r'(G-e)+1)-(r'(B)+1)} \cdot v^{(|B|+1)-(r'(B)+1)}$$

$$= u\cdot \underbrace{\sum_{A\subseteq E-e} u^{r'(G-e)-r'(A)} \cdot v^{|A|-r'(A)}}_{R_{G-e}(u,v)} + \underbrace{\sum_{B=A-e} u^{r'(G-e)-r'(B)} \cdot v^{|B|-r'(B)}}_{R_{G-e}(u,v)}$$

$$= (u+1)R_{G-e}(u,v).$$

□

Primer C_4: Že vemo, da je $R_{C_4}(x,y) = x^3+4x^2+6x+4+y$.

Tedaj: $R_{C_4}(x-1,y-1) = (x-1)^3+4(x-1)^2+6(x-1)+4+(y-1)$
$$= x^3+x^2+x+y = T_{C_4}(x,y).$$

Opomba: Iz definicije $T_G(x,y) = \sum t_{ij} x^i y^j$ takoj sledi, da so koeficienti t_{ij} nenegativna cela števila. To je precej presenetljivo, glede na to, da je $T_G(x,y) = R_G(x-1,y-1)$, torej da razvijamo potence od $(x-1)$ in $(y-1)$!

POSLEDICA. Naj bo G povezan graf. Tedaj velja:

(i) $T_G(1,1)$ je # vpetih dreves v G

(ii) $T_G(2,1)$ je # vpetih gozdov v G

(iii) $T_G(1,2)$ je # povezanih vpetih podgrafov v G

(iv) $T_G(2,2) = 2^{|E(G)|}$.

Dokaz. (i): $T_G(1,1) = R_G(0,0) = \sum_{A\subseteq E} 0^{r(G)-r(A)} \cdot 0^{|A|-r(A)}$

Prispevki bodo neničelni $\Leftrightarrow$ $r(G)=r(A)$ in $|A|=r(A)$ torej $\Leftrightarrow$ $r(G)=r(A)=|A|$.

Ker je G povezan, je $r(G)=|V|-1$. Nadalje: $r(A)=A$ $\Leftrightarrow$ A inducira vpeti gozd.

Skupaj nam torej preštejejo vpeta drevesa.

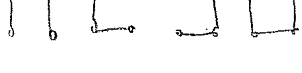
(ii) Analogno, le da je sedaj edini pogoj $|A|=r(A)$ $\Leftrightarrow$ A inducira vpeti gozd.

(iii) Sedaj je pogoj $r(G)=r(A)$ $\Leftrightarrow$ A inducira vpet povezan podgraf.

(iv) $T_G(2,2) = R_G(1,1) = \sum_{A\subseteq E} 1^{r(G)-r(A)} \cdot 1^{|A|-r(A)} = \sum_{A\subseteq E} 1 = 2^{|E|}$. □

Primer C_4: $T_{C_4}(x,y) = x^3+x^2+x+y$

$T_{C_4}(1,1)=4$ $\quad$ $T_{C_4}(2,1)=15$ $\quad$ $T_{C_4}(1,2)=5$ $\quad$ $T_{C_4}(2,2)=16=2^4$ ✓



→ tile 4

→ $6\times$ 2 povezavi

$4\times$ 1 povezava

$1\times$ 0 povezav

isti še graf +