KOMBINATORIKA (univ. 2. stopnja)
oz. KOMBINATORIKA II (IŠRM, univ. 2. stopnja)

pripravljeno: 2013/14

<u>Literatura</u>: Martin Aigner: A Course in Enumeration, Springer, 2007.

Zaradi različnega predznanja (MAT2, FM2, PM, IŠRM) si, preden zares začnemo, oglejmo osnovna pravila preštevanja.

- <u>Pravilo vsote</u>: Če je $S = \bigcup_{i=1}^{t} S_i$ unija disjunktnih množic, tedaj je $|S| = \sum_{i=1}^{t} |S_i|$.

Najpogosteje se pravilo uporablja tako, da se S razbije glede na neke lastnosti. Torej, če so e_i, $1 \le i \le t$, lastnosti množic, tedaj postavimo $S_i = \{x \in S : x$ ima lastnost $e_i\}$.

<u>Primer.</u> Naj bo X n-množica in naj bo $S = \binom{X}{k}$ (torej množica vseh k-podmnožic od X). Potem definiramo $\binom{n}{k} = |S|$. Naj bo $a \in X$ in postavimo:

$$S_1 = \{A \in S : a \in A\}$$
$$S_2 = \{A \in S : a \notin A\}.$$

Ker je $|S_1| = \binom{n-1}{k-1}$ in $|S_2| = \binom{n-1}{k}$, pravilo vsote pravi:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad n, k \ge 1 \ldots$$ <u>Pascalova identiteta</u>

- Pravilo produkta: Če je $S = \prod_{i=1}^{t} S_i$ kartezični produkt množic, potem je $|S| = \prod_{i=1}^{t} |S_i|$.

Primer. Število binarnih besed dolžine n je 2^n. Splošneje, število n-besed nad r-množico je r^n.

- Pravilo bijekcije: Če obstaja bijekcija med S in T, potem je $|S| = |T|$.

Primer. Naj bo X n-množica in 2^X njena potenčna množica. Če pišemo $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ in definiramo predpisom

$$f : A \in 2^X \mapsto (a_1, \dots, a_n), \quad \text{kjer je}$$

$$a_i = \begin{cases} 1; & x_i \in A \\ 0; & x_i \notin A \end{cases}$$

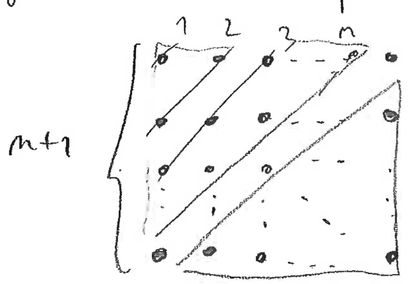
je to bijekcija med 2^X in množico binarnih besed dolžine n. Torej je

$$|2^X| = 2^{|X|} = 2^n.$$

Pravilo bijekcije vodi pogosto do zanimivih problemov. Npr., recimo vemo, da je $|S| = |T|$. Izziv: najti bijektivni dokaz!

- Pravilo dvojnega štetja: če dve formuli preštejeta isto množico, potem morata biti formuli enaki!

Primer. Poglejmo $(n+1) \times (n+1)$ pravokotnik pik:



$\#$ pik: $2 \cdot (1+2+\dots+n) + (n+1)$

$\#$ pik: $(n+1)^2$

$$\Downarrow$$

$$2 \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = (n+1)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}.$$

Poseben primer dvojnega štetja je pravilo štetja parov:

Naj bosta S in T množici in I relacija nad $S \times T$, pravimo ji tudi incidenčna relacija: če je aIb, pravimo, da sta a in b incidenčna.

Za $a \in S$ naj bo $d(a)$ # elt. iz T, ki so incidenčni z a

Za $b \in T$ naj bo $d(b)$ # elt. iz S, -||- b.

Tedaj velja:

$$\sum_{a \in S} d(a) = \sum_{b \in T} d(b).$$