KOMBINATORIKA (KOMBINATORIKA 2)

Osnovna literatura:

Martin Aigner: A Course in Enumeration, Springer, 2007

Pravilo vsote: Če je $S = \dot{\bigcup}_{i=1}^{t} S_i$ unija disjunktnih množic, tedaj je

$$|S| = \sum_{i=1}^{t} |S_i| .$$

Primer: X n-množica.

$S = \binom{X}{k}$ ... vse k-podmnožice množice X.

$a \in X$.

$S_1 = \{A \in S : a \in A\}$

$S_2 = \{A \in S : a \notin A\}$

$S_1 \cap S_2 = \emptyset$

$$\binom{n}{r} = \left|\binom{S}{r}\right|$$

$$|S_1| = \binom{n-1}{r-1} \qquad |S_2| = \binom{n-1}{r}$$

$$S = S_1 \cup S_2$$

$\Downarrow$ pravilo vsote

$$\boxed{\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}}$$ ... Pascalova identiteta

Pravilo produkta. Če je $S = \prod_{i=1}^{t} S_i$ kartezični produkt množic, tedaj je $|S| = \prod_{i=1}^{t} |S_i|$.

Primer. Vseh binarnih nizov dolžine n je 2^n.

$$B = \{0,1\} \qquad \prod^n B$$

Pravilo bijekcije: Če obstaja bijekcija $S \longrightarrow T$, tedaj je $|S| = |T|$.

Primer. X n-množica, 2^X ... potenčna množica od X.

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$f : 2^X \to \prod^n B$$

$$A \in 2^X \xmapsto{f} (a_1, \dots, a_n),$$

$$a_i = \begin{cases} 1; & x_i \in A \\ 0; & x_i \notin A \end{cases}$$

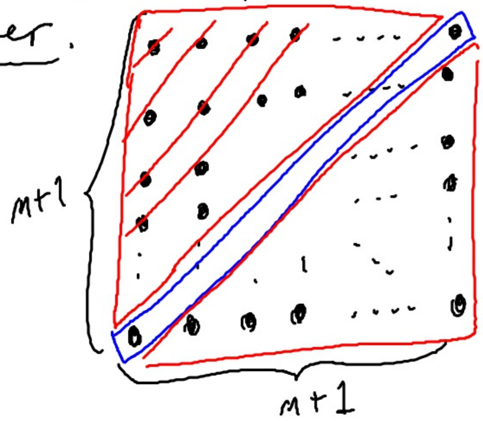
Ker je f bijekcija, pravilo bijekcije pravi, da je

$$|2^X| = |\hat{\prod} B| = 2^n$$

$$|2^X| = 2^{|X|}$$

<u>pravilo dvojnega štetja</u>: Če dve formuli preštejeta isto objekto, potem morata biti formuli enaki.

<u>Primer</u>.



$$\# \text{pik} = (n+1)^2$$

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$$

$$2 \sum_{i=1}^{n} i = (n+1) \cdot n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

<u>pravilo štetja parov</u> (kot poseben primer dvojnega štetja):

S, T množici

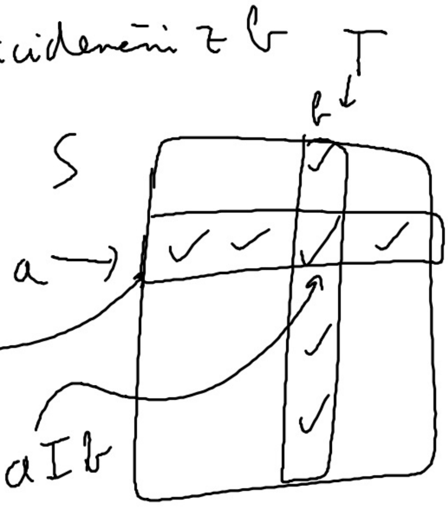
$I \subseteq S \times T$ ... incidenčna relacija

$a I b$ ... a in b sta incidenčna

$a \in S$: $d(a) = \#$ elt. iz T, ki so incidenčni z a

$b \in T$: $d(b) = \#$ elt. iz S, ki so incidenčni z b

$$\boxed{\sum_{a \in S} d(a) = \sum_{b \in T} d(b)}$$



$d(a) = \#\checkmark$ v vrstici

1. BINOMSKI IN MULTINOMSKI KOEFICIENTI

$\binom{n}{k}$ ... # k-podmnožic n-množica

<u>Def.</u> <u>k-permutacija</u> n množice je k-beseda
iz ravnih različnih elementov množice.

<u>Primer.</u> 2713 je 4-permutacija množice $[8]$.

Dogovor: $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$

$[n]_0 = \{0, 1, \dots, n-1\}$

<u>TRDITEV.</u> Število k-permutacij n-množice je $n(n-1)\cdots(n-k+$

$$n^{\underline{k}} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$ ... <u>padajoča potenca</u>

$$n^{\underline{0}} = 1$$

$$n^{\overline{k}} = n(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)$$ ... <u>naraščajoča potenca</u>

$$n^{\overline{0}} = 1$$

Preštejmo k-permutacije n-množice že takole:

$$\binom{n}{k} \cdot k! = n^{\underline{k}}$$

TRDITEV. $$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}.$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\Downarrow$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Bijektivni dokaz: $A \subset X \longmapsto A^c$.

k-množica $\quad$ n-množica

Polinomska metoda

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \qquad (1)$$

Poglejmo si polinoma:

$$x^{\underline{k}} = x(x-1)\cdots(x-k+1)$$

$$x^{\overline{k}} = x(x+1)\cdots(x+k-1)$$

Opazimo:

$$\frac{x^{\underline{k}}}{k!} \quad \text{in} \quad \frac{(x-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} + \frac{(x-1)^{\underline{k}}}{k!}$$

To sta polinoma stopnje k nad $\mathbb{C}$. Ker se zaradi (1) ujemata v več kot k točkah, sta enaka:

$$\frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{(x-1)^{\underline{k-1}}}{(k-1)!} + \frac{(x-1)^{\underline{k}}}{k!}. \qquad (2)$$

<u>Def</u>: $\binom{c}{k} = \frac{c^{\underline{k}}}{k!}$, $c \in \mathbb{C}$, $k \geq 0$

Tedaj (2) pravi, da velja:

$$\binom{c}{k} = \binom{c-1}{k-1} + \binom{c-1}{k} \quad c \in \mathbb{C},\ k \geq 0. \qquad (3)$$

Če nadalje postavimo:

$$\binom{c}{k} = \begin{cases} \frac{c^{\underline{k}}}{k!}\ ; & k \geq 0, \\ 0\ ; & k < 0, \end{cases}$$

tedaj (3) še vedno velja, torej imamo:

$$\boxed{\binom{c}{k} = \binom{c-1}{k-1} + \binom{c-1}{k}, \quad c \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{Z}.}$$

$$
\begin{aligned}
(-x)^{\underline{k}} &= (-x)(-x-1)(-x-2)\cdots(-x-k+1) \\
&= (-1)^k x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1) \\
&= (-1)^k x^{\overline{k}}
\end{aligned}
$$

"$x = -x$": $\quad x^{\underline{k}} = (-1)^k (-x)^{\overline{k}} \Rightarrow (-x)^{\overline{k}} = (-1)^k x^{\underline{k}}$

$$\boxed{(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k x^{\overline{k}} \quad \text{in} \quad (-x)^{\overline{k}} = (-1)^k x^{\underline{k}}} \qquad (4)$$

zakon vzajemnosti:

$$\begin{aligned} x^{\overline{k}} &= x(x+1)\dots(x+k-1) \\ &= (x+k-1)(x+k-2)\dots(x+1)x \\ &= (x+k-1)^{\underline{k}} \overset{(4)}{\Longrightarrow} \frac{(-x)^{\underline{k}}}{k!} = \frac{(-1)^k (x+k-1)^{\underline{k}}}{k!} \end{aligned}$$

če to delimo s $k!$, dobimo:

$$\boxed{\binom{-c}{k} = (-1)^k \binom{c+k-1}{k}}$$

iz druge enačbe v (4):

$$\boxed{(-1)^k \binom{c}{k} = \binom{k-c-1}{k}}$$

Pascalova matrika $\left(\binom{n}{k}\right)_{n,k \geq 0}$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1
	+	−	+	−	+			

TRDITEV. (i) $\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

(ii) $\sum_{i=0}^{k} \binom{n+i}{i} = \binom{n+k+1}{k}$

(iii) $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$.

Dokaz: (i) $\binom{n+1}{k+1} = \#\,(k+1)$-podmnožic $(n+1)$-množice X.

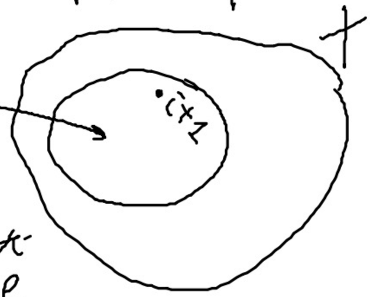
Razdelimo vse te podmnožice glede na največji elt., ki se pojavi v podmnožici.

Naj bo največji elt. $i+1$. : $1 \le i+1 \le n+1$

$$\Rightarrow \binom{n+1}{k+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k}. \qquad 0 \le i \le n$$

ta množica določena z izbiro k elt. iz $[i]$.

$\# = \binom{i}{k}$



(ii)
$$\sum_{i=0}^{r}\binom{m+i}{i} = \sum_{i=0}^{r}\binom{m+i}{m} = \binom{m}{m} + \dots + \binom{m+r}{m}$$

$$= \sum_{i=0}^{m+r}\binom{i}{m} \overset{(i)}{=} \binom{m+r+1}{m+1} = \binom{m+r+1}{(m+r+1)-(m+1)} = \binom{m+r+1}{r}$$

(iii)
$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{m}\binom{k-n-1}{k}$$

$$(-1)^k\binom{c}{k} = \binom{k-c-1}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\binom{(-n-1)+k}{k} \overset{(ii)}{=} \binom{(-n-1)+m+1}{m}$$

$$\binom{-c}{k} = (-1)^k\binom{k+c-1}{k}$$

$$= \binom{-n+m}{m} = (-1)^m\binom{m+(n-m)-1}{m} = (-1)^m\binom{n-1}{m}$$

$$\binom{-n+m}{m} = \binom{-(n-m)}{m}$$

$\square$

Binomski izrek: $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Posebni primeri:

(a) $y=1$: $$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

(b) $y=-1$: $$(x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k$$

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ 1; & i = j \end{cases}$$

$x=1$ v (a): $$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

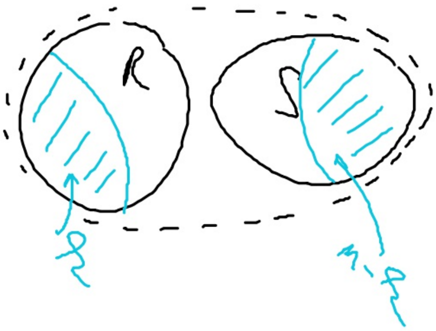
$x=1$ v (b): $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = \delta_{n,0}$$

IZREK (Vandermondeova identiteta)

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}. \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Dokaz. Naj bosta R, S disjunktni množici, $|R| = r$, $|S| = s$. Tedaj je # n-podmnožic v $R \cup S$ enako $\binom{r+s}{n}$.

Te podmnožice razlikujejo glede na število k elt. v R, $0 \leq k \leq n$. Takih podmnožic je $\binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}$. $\Rightarrow$



$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \cdot \binom{s}{n-k}.$$

Polinomska metoda zaključi dokaz. $\square$

Multimnožice

$\{1,1,3,4,5,5,6,6,6\}$ je multimnožica nad $[6]$, natančneje, to je 9-multimnožica.

TRDITEV. Število k-multimnožic nad n-množico je

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!}.$$

Dokaz. $X=\{x_1,\dots,x_n\}$. Poljubno k-multimnožico nad X lahko predstavimo takole:

$$x_1\dots x_1\ x_2\dots x_2\ \dots\ x_n\dots x_n$$

$$\underbrace{1\dots10\,1\dots10\dots01\dots1}_{k+(n-1)}$$

$$\boxed{11001010110111}$$

Imamo $k+n-1$ mest; razporeditev je enolično določena z izbiro k mest za bit 1

$$\binom{n+k-1}{k}$$

$\square$

Opombe: $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$ $\binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!}$

$\binom{n}{k}$ ... # neurejenih izbir k elt. iz n množice brez ponavljanja.

$\binom{n+k-1}{k}$ ... # neurejenih izbir k elt. iz n množice s ponavljanjem.

<u>IZREK.</u> (<u>multinomski izrek</u>)

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{(k_1, \dots, k_m)} \binom{n}{k_1 \dots k_m} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m},$$

kjer je

$$\binom{n}{k_1 \dots k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot \dots \cdot k_m!}$$ <u>multinomski koeficient</u>

in $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$, $k_i \geq 0$.

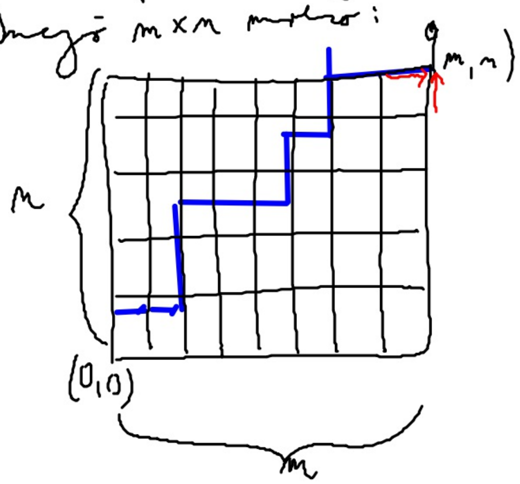
Opomba: $m = 2 \Rightarrow$ binomski izrek $\binom{n}{k_1\ k_2} = \binom{n}{k_1} = \binom{n}{k_2}$

$k_1 + k_2 = n$

Opomba: $\binom{n}{k_1 \dots k_m}$ je # besed nad m-množico dolžine n, kjer i-ti simbol, $1 \leq i \leq m$, nastopa k_i-krat.

Mrežne poti:

Imejmo $m \times n$ mrežo:



$L(m,n)$ ... # takih poti od $(0,0)$ do (m,n)

$$L(m,n) = L(m-1,n) + L(m,n-1)$$

To je rekurzija, ki velja za $\binom{m+n}{m}$

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{m}$$

$$L(0,0) = 1 \quad \Rightarrow L(m,n) = \binom{m+n}{m}$$

Druga rešitev: zakodirajmo pot s simboloma E in N:

$$E: \longrightarrow$$

$$N: \uparrow$$

Na primer: $\underbrace{EENNEEENENEE}_{n+m \text{ simbolov}}$

Niz bo enolično določen z izbiro n mest za simbol N:

$$\binom{n+m}{n}$$

Če izberemo mesta za E:

$$\binom{n+m}{m}$$

2. STIRLINGOVA ŠTEVILA

Za $0 \leq k \leq n$ je Stirlingovo število druge vrste, $S(n,k)$, število razbitij n-množice v k nepraznih kosov.

$S(0,0)=1$; $S(0,k)=0$, $k>0$, $S(n,0)=0$, $n>0$.

Opomba: druga standardna oznaka: $\left\{ {n \atop k} \right\} \equiv S(n,k)$.