Neskončne matrike, rekurzivne zveze, binomska inverzija

18. april 2014

1. Ponovitev naloge prejšnjega tedna; vse smo na vajah že obdelali v dveh delih, nismo pa pregledeno zapisali postopka:

   (a) Najdi enolično zaporedje (a_n) realnih števil, tako da [1]

   $$\sum_{n=0}^{n} a_k a_{n-k} = 1 \quad (n \geq 0).$$

   (b) Rezultat iz (a) poenostavi. Najprej dokaži, da:

   $$r^{\underline{k}}(r - \frac{1}{2})^{\underline{k}} = \frac{(2r)^{\underline{2k}}}{2^{2k}}$$

   (c) S pomočjo tega pokaži, da:

   $$\binom{-1/2}{n} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n},$$

   ter da je rešitev (a) enaka $\binom{2n}{n}/4^n$.

2. Naj velja $A \in \mathcal{M}^l$. Dokaži, da A^{-1} obstaja natanko takrat, ko velja $a_{i,i} \neq 0$, za vsak $i \in \mathbb{N}$.

3. Določi povezovalne koeficiente $L_{n,k}$ med polinomskima bazama $(x^{\underline{n}})$ ter $(x^{\overline{n}})$, tj.: $x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k} x^{\underline{k}}$. Tem koeficientom pravimo Lahova števila[2].

4. Določi dvočleno rekurzivno zvezo za Lahova števila.

5. Določi števila $a_n \in \mathbb{N}_0$, ki ustrezajo identiteti:

   $$n! = a_0 + a_1 n^{\underline{1}} + a_2 n^{\underline{2}} + \ldots + a_n n^{\underline{n}} \ (n \geq 0).$$

6. **Domača naloga:** lepo praznuj velikonočne praznike!

---

[1] Uporabi dejstvo, da binomski izrek drži za vse realne eksponente. Če ti to ne da miru, lahko zadevo brez težav preveriš, če s pomočjo Taylorjeve vrste v okolici 0 razviješ funkcijo $(1+x)^r; r \in \mathbb{R}$.

[2] Ivo Lah je bil slovenski matematik, statistik, demograf in aktuar. Po njem se imenujejo Lahova števila, ki jih je odkril leta 1955.