Pravilo vključitev in izključitev, Möbiusova funkcija

23. maj 2014

1. Pobarvaj števila od 1 do $2n$ z rdečo ter modro barvo, tako da je vsak predhodnik rdeče pobarvanega števila tudi rdeč, ter taka barvanja preštej. S pomočjo tega dokaži:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-k}{k}2^{2n-2k} = 2n+1.$$

2. Pobarvaj kroglice, označene od 1 do $2n$ z rdečo, modro, ter zeleno barvo, tako da

   (a) je vsak predhodnik rdeče pobarvanega števila rdeč ali zelen,

   (b) pred zeleno kroglico leži vsaj ena modra,

   (c) v barvanju obstaja natanko 1 zelena kroglica. Taka barvanja preštej. S pomočjo tega dokaži:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}k\cdot\binom{2n-k}{k}\cdot 2^{2n-2k} = \binom{2n}{3},$$

   oziroma splošneje:

$$\sum_{k=p}^{n}(-1)^{k+p}\binom{2n-k}{p}\cdot\binom{2n-k-p}{k-p}\cdot 2^{2n-2k} = \binom{2n+1-p}{1+2p}.$$

3. Po definiciji (brez pomoči direktnega produkta) izračunaj Möbiusov inverz za relacijo $\subseteq$ množice 2^X, kjer je X poljubna (končna) množica.

4. Izračunaj Möbiusov inverz za relacijo $|$ v $\mathbb{N}$.

5. Naj bo $(\mathbb{Z}, \spadesuit)$delna urejenost , kjer poleg refleksivnosti velja $a\spadesuit b \Leftrightarrow |a| < |b|$. Najdi Möbiusov inverz.

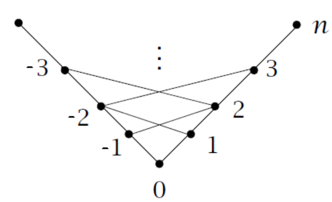

Figure 1: Delna urejenost iz naloge 5.