

Reševanje rekurzivnih zvez, pravilo vključitev in izključitev

16. maj 2014

1. Naj bo i_n število involucij v $S(n)$. Kot vemo, velja:

$$i_{n+1} = i_n + ni_{n-1} \quad (n \geq 0), \quad i_0 = 1.$$

Najdi eksponentno rodovno funkcijo za i_n .

2. Naj bo A_n število možnih tlakovanj mreže z dominami pravokotnika oblike $2 \times n$, npr. $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$. Izračunaj A_n .
3. Naj bo B_n število možnih tlakovanj mreže z dominami pravokotnika oblike $3 \times n$, npr. $A_0 = 1$, $A_1 = 0$, $A_2 = 3$. Izračunaj B_n .
4. Vemo, da je število ne-negativnih celoštevilskih rešitev enačbe $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ enako $\binom{n+k-1}{n-1}$. S pomočjo pravila vključitev in izključitev izračunaj število takih rešitev ob dodatni predpostavki $x_i < s$, za poljuben $1 \leq i \leq n$.
5. Za dolgo mizo z oštevilčenimi sedeži (od 1 do $2n$) se k večerji usede n parov. Na koliko načinov se lahko usedejo, tako da noben par ne sedi skupaj. Upoštevaj, da miza ni okrogla, tj. mesti 1 ter $2n$ nista sosedni.
6. Pobarvaj števila od 1 do $2n$ z rdečo ter modro barvo, tako da je vsak predhodnik rdeče pobarvanega števila tudi rdeč, ter taka barvanja preštej. S pomočjo tega dokaži:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n-k}{k} 2^{2n-2k} = 2n + 1.$$