

Verjetnostne metode v računalništvu

prva domača naloga

Rok za oddajo domače naloge je torek, 26. 11. 2013 ob 18.00. Oddaja je preko spletne učilnice ali v predalček asistenta (pritičje na Jadranski 19 (fzika)). Če imate vprašanja, se obrnite na asistenta ali profesorja oz. uporabite forum na učilnici. O nalogah se lahko pogovarjate, o rešitvah pa ne. Če boste uporabili vire (knjige, splet), jih tudi navedite.

Naloga 1

Opazujemo naslednji algoritem:

Algoritem 1: PERMUTIRANJE(n)

Vhod: Naravno število $n > 1$

Izhod: Tabela števil $A[1 \dots n]$

A = tabela ničel velikosti n

i_0 = enakomerno naključno izbrano število iz množice $\{1, 2 \dots n\}$

for $i = 1, 2 \dots n$ **do**

$A[i] = (i + i_0 \pmod{n}) + 1$

return A

- Naj bosta $1 \leq i, j \leq n$. Kolikšna je verjetnost, da algoritem PERMUTIRANJE na vhodu n vrne tako tabelo A , da je $A[i] = j$? Odgovor utemelji.
- Ali algoritem enakomerno vrača naključno permutacijo in zakaj?

Naloga 2

Opazujemo naslednji algoritem:

Algoritem 2: KOŠARA(n)

Vhod: Naravno število $n > 1$

Izhod: \

K = košara, ki vsebuje natanko eno belo in eno črno žogo

while K vsebuje $< n$ belih žog **do**

\check{Z} = enakomerno naključno izbrana žoga iz košare K

if \check{Z} je barve X **then**

 └ daj \check{Z} nazaj v K in dodaj še eno (novo) belo žogo v K

else

 └ daj \check{Z} nazaj v K

1. Koliko je pričakovano število preverjanj pogoja zanke **while**, če je X bela barva?
2. Koliko je pričakovano število preverjanj pogoja zanke **while**, če je X črna barva?

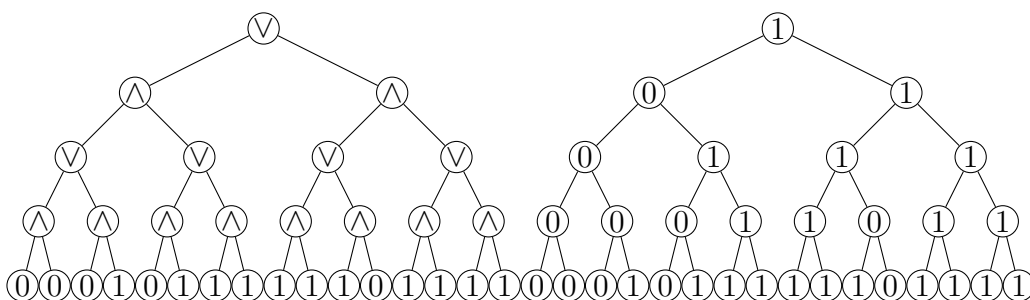
Nalogo reši natančno (brez notacije veliki O).

Naloga 3

Naj bo T drevo s korenom in naj bo h sodo število. Vsi listi drevesa T so na nivoju h in vsako notranje vozlišče tega drevesa ima natanko dva sinova. Naj bo $n = 2^h$ (= število listov drevesa T). Vsa notranja vozlišča na lihih nivojih imajo označbo \wedge , vsa notranja vozlišča na sodih nivojih (torej tudi koren) imajo označbo \vee , vsak list pa ima podano vrednost 0 ali 1, kot kaže primer na sliki 1 levo.

Vrednost notranjega vozlišča je definirana rekurzivno. Če ima vozlišče oznako \wedge , je vrednost tega vozlišča enaka 1 natanko tedaj, ko je vrednost obeh sinov enaka 1. Sicer je vrednost tega vozlišča enaka 0. Če ima vozlišče oznako \vee , je vrednost tega vozlišča enaka 0 natanko tedaj, ko je vrednost obeh sinov enaka 0. Sicer je vrednost tega vozlišča enaka 1 (glej primer na sliki 1).

Opiši naključnostni algoritem, ki sprejme drevo T z lastnostmi, opisanimi v prvem odstavku, in izračuna vrednost korena. Pričakovano število listov, pri katerih algoritem pogleda vrednost, naj bo $O(\sqrt[n]{n^5})$.



Slika 1: Drevo iz naloge 3.