Verjetnostne metode v računalništvu
druga domača naloga

Rok za oddajo domače naloge je torek, 17. 12. 2013 ob 18.00. Oddaja je preko spletne učilnice (le format .pdf) ali v predalček asistenta (pritličje na Jadranski 19 (fizika)). Če imate vprašanja, se obrnite na asistenta ali profesorja oz. uporabite forum na učilnici. O nalogah se lahko pogovarjate, o rešitvah pa ne. Če boste uporabili vire (knjige, splet), jih tudi navedite.

Naloga 1 (2 točki)

Definirajmo razred problemov $BPP(p)$ tako:

$$L \in BPP(p) \iff \begin{array}{l}\text{obstaja naključnostni algoritem } M \text{ polinomske} \\ \text{časovne zahtevnosti, tako da za vsak vhod } w \\ \text{velja } \Pr(M(w) = L(w)) \geq p.\end{array}$$

Torej velja $BPP = BPP(\frac{3}{4})$.

a) Pokaži, da za vsak $p \leq \frac{1}{2}$ in za vsak odločitveni problem L velja $L \in BPP(p)$.

b) Pokaži, da za vsak $1 > p > \frac{1}{2}$ velja $BPP = BPP(p)$.

Naloga 2 (4 točke)

Naj bosta T_1 in T_2 drevesi s korenom. Pravimo, da sta T_1 in T_2 izomorfni, če obstaja bijektivna preslikava f iz množice vozlišč drevesa T_1 v množico vozlišč drevesa T_2, tako da velja: za vsako notranje vozlišče v drevesa T_1 s sinovi $v_1, v_2 \ldots v_k$ ima vozlišče $f(v)$ natanko sinove $f(v_1), f(v_2) \ldots f(v_k)$.

S pomočjo polinomov opišite Monte Carlo algoritem z enostransko napako, ki na vhodu dobi drevesi s korenom T_1 in T_2 ter vrne odgovor na vprašanje: "Ali sta T_1 in T_2 izomorfni?" Naj algoritem uporablja le met poštenega kovanca kot naključni proces in naj na vsakem vhodu vrne pravilni odgovor z verjetnostjo vsaj 80%.

Kakšna je časovna zahtevnost vašega algoritma (v notaciji veliki O), če se za en korak šteje ena aritmetična operacija (oz. ena ponovitev zanke, če zanka ne vsebuje aritmetičnih operacij)[1]? Podajte zgornjo mejo za število naključnih bitov (tj. število metov kovanca), ki jih uporabi vaš algoritem.

Namig: Vozlišču v priredite polinom P_v, tako da za liste velja $P_v(x_0, x_1 \ldots) = x_0$. Za vozlišča, ki mejijo na liste, definirajte polinom z uporabo spremenljivke x_1 in že definiranih polinomov ... Najelegantneje je podati definicijo rekurzivno.

Naloga 3 (4 točke)

Naj bo W naključen niz, enakomerno izbran med nizi ničel in enic dolžine n. Dokaži:

a) $\Pr(\text{v } W \text{ obstaja } 2\log n \text{ zaporednih ničel}) \leq \frac{1}{n}$.

b) $\Pr(\text{v } W \text{ je največ } \frac{\log n}{2} \text{ zaporednih ničel}) \leq \frac{K}{n}$ za neko konstanto K.
Namig: Asistent si je pri rešitvi pomagal z naslednjo identiteto:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}.$$

c) $\mathbb{E}(\text{maksimalno število zaporednih ničel v } W) = \Theta(\log n)$. To pomeni, da obstajata pozitivni konstanti C_1 in C_2, da velja

$$C_1 \log n \leq \mathbb{E}(\text{maksimalno število zaporednih ničel v } W) \leq C_2 \log n$$

za vse dovolj velike n.

Namig: Nalogo 3 gre rešiti brez uporabe "težkih" izrekov iz predavanj oz. vaj.

[1]Predpostavite lahko tudi, da je računanje $\lfloor \log x \rfloor$ (in podobnih izrazov) za $x \in \mathbb{N}$ zahtevnosti $O(1)$. Algoritem eksponentne časovne zahtevnosti ne prinaša točk. Ne zanima nas pričakovana časovna zahtevnost, temveč časovna zahtevnost "v najslabšem primeru".