Verjetnostne metode v računalništvu

tretja domača naloga

Rok za oddajo domače naloge je četrtek, 23. 1. 2014 ob 10.00. Oddaja je preko spletne učilnice (le format .pdf) ali v predalček asistenta (pritličje na Jadranski 19 (fizika)). Če imate vprašanja, se obrnite na asistenta ali profesorja oz. uporabite forum na učilnici. O nalogah se lahko pogovarjate, o rešitvah pa ne. Če boste uporabili vire (knjige, splet), jih tudi navedite.

Naloga 1 (3 točke)

Imamo 10 košar in n žog. Vsako žogo posebej vržemo v enakomerno naključno izbrano košaro. Naj bo X število žog v košari, ki ki ima največ žog in naj bo Y število žog v košari, ki ima najmanj žog. Pokaži, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja konstanta c, ki zadošča

$$\Pr\left[X - Y \geq c\sqrt{n}\right] \leq \epsilon.$$

Naloga 2 (4 točke)

Opazujemo naslednji algoritem.

Algoritem 1: MERJENJE(k)

```
Vhod: Naravno število k
x = 0
for i = 1, 2 ... k do
    vržemo pošteno igralno kocko
    if dobimo 2, 4 ali 6 then
        izberemo točko (a, b) ∈ [0, 2] × [0, 2] enakomerno naključno
        if a^2 < b then
            x = x + 1
return 6 x/k
```

1. Določi pričakovano vrednost števila, ki ga vrne algoritem.

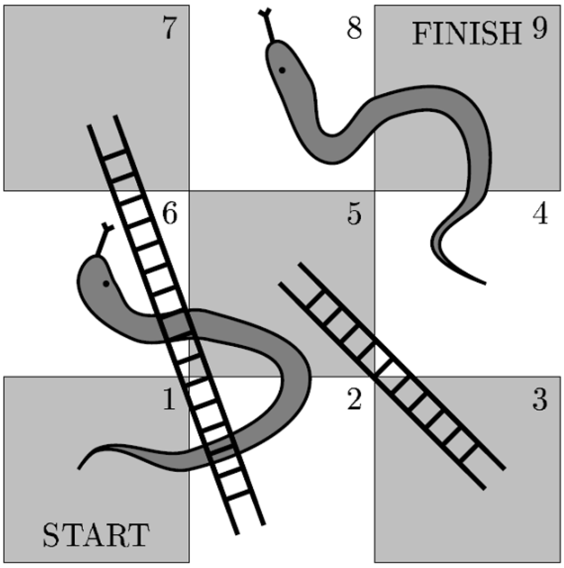
2. Izračunaj vrednost parametra k, za katerega je

$$\Pr\left[\left|6\frac{x}{k} - \sqrt{2}\right| < 10^{-5}\right] \geq 0.99$$

3. Spremeni oba pogoja v *if* stavkih, tako da bo nov algoritem izračunal (ϵ, δ) aproksimacijo $ln\, 2$ za dovolj velik k. Koliko je ta k?
   Namig: $\int \frac{1}{x} dx = ln\, x + konst.$

Naloga 3 (3 točke)

Igra *Kače in lestve* se igra na šahovnici 3×3, ki je prikazana na sliki. Igra je



namenjena enemu igralcu. Le-ta začne na polju 1, nato pa zaporedoma meče pošten kovanec: če vrže grb, se premakne za 1 naprej, če vrže cifro, pa za 2 naprej. Če pristane na polju, kjer se začne lestev, spleza po lestvi navzgor do vrha. Če pa pristane na polju z glavo kače, pa zdrsne po kači vse do njenega repa. Igra se zaključi, ko igralec pride do polja 9.

Primer: Igralec lahko zaključi igro v dveh potezah, če najprej vrže grb, nato pa cifro. Če pa vrže dva grba, pristane na polju 4.

1. Koliko je pričakovano število korakov v igri?

2. Igro malenkost spremenimo: Če je igralec na polju 9, se igra ne zaključi, ampak igralec ponovno meče kovanec. Če zadane grb, ostane na polju 9, sicer pa gre na polje 4. Tako se igra nikoli ne konča.

   Predpostavimo, da začnemo na enakomerno naključno izbranem polju iz množice $\{1, 4, 5, 7, 9\}$. Na katerem polju bomo najverjetneje po 1296 korakih? Navedi vsa taka polja (če jih je več). Predpostavi, da igralec nikoli ni na poljih $2, 3, 6, 8$, saj se na teh poljih takoj premakne navzgor/navzdol.