Izbrane izpitne naloge iz biomehanike 1 (*rešitve*)

1 A.2 Kinematika - teoretične naloge

1.0.1 42. NALOGA

Povprečno hitrost tekača se izračuna tako, da se sešteje celotno pot, ki jo je tekač opravil, in se jo deli s časom, v katerem jo je opravil:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Povprečna hitrost tekača na 400 m je kar enaka tej dolžini deljeni s časom, ki ga je tekač potreboval:

$$\bar{v} = \frac{400 \text{ m}}{t}.$$

1.0.2 43. NALOGA

Višina žogice h v odvisnosti od časa:

$$h(t) = v_z t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2},$$

kjer sta v_0 in φ začetna hitrost in kot, g pa je težni pospešek.
Dolžina leta žogice d:

$$d = v_x t_0 = v_0 t_0 \cos\varphi,$$

kjer je t_0 čas leta žogice in ga dobimo iz rešitve zgornje enačbe - $h(t_0 \neq 0) = 0$:

$$0 = v_0 t_0 \sin\varphi - \frac{gt_0^2}{2} \quad \rightarrow \quad t_0 = \frac{2v_0 \sin\varphi}{g}.$$

Celotna enačba za dolžino leta je torej:

$$d = \frac{2v_0^2 \sin\varphi \cos\varphi}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}.$$

1.0.3 46. NALOGA

Skok met - igralec se odrine v zrak in v čim višji (najvišji?) točki vrže žogo. Obrambni skok - igralec se odrine v zrak in poskuša skočiti čim višje z namenom doseči trajektorijo žoge ob času, ko ga žoga prečka. Ali bo do blokade prišlo lahko izračunamo če npr. poznamo: začtno lego in hitrost žoge h_0 in v_0, kot meta žoge φ, oddaljenost obrambnega igralca d, čas njegovega odriva glede na čas meta žoge t_1 in začetno hitrost v_1 ter, kako visoko lahko doseže brez skoka h_1. Najprej izračunamo na kaki višini bo žoga prečkala obrambnega igralca:

$$h_{\text{žoga}} = h_0 + v_0 t_0 \sin\varphi - \frac{gt_0^2}{2}, \qquad t_0 = \frac{d}{v_0 \cos\varphi},$$

$$h_{\text{žoga}} = h_0 + d\,\text{tg}\varphi - \frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2\varphi}.$$

Potem izračunamo, kako višino bodo dosegle roke obrambnega igralca ob tem času:

$$h_{\text{obr. igralec}} = h_1 + v_1(t_0 - t_1) - \frac{g(t_0 - t_1)^2}{2}.$$

Če je druga višina večja od prve, bo blokada uspešna.

1.0.4 47. NALOGA

Pri enakomernem kroženju metalca kladiva se težišče kladiva premika v vodoravni krožnici. Če želimo obravnavati enačbe, ki opisujejo lego, hitrost in pospešek težišča kladiva v kartezičnem koordinatnem sistemu $(x, y), (v_x, v_y), (a_x, a_y)$ imamo takoj opravka s trigonometričnimi funkcijami, npr ob radiju r_0 in kotni hitrosti vrtenja ω:

$$x = r_0 \cos \omega t, \qquad y = r_0 \sin \omega t,$$

$$v_x = -r_0 \omega \sin \omega t, \qquad v_y = r_0 \omega \cos \omega t,$$
$$a_x = -r_0 \omega^2 \cos \omega t, \qquad a_y = -r_0 \omega^2 \sin \omega t.$$

V polarnih koordinatah se stvari poenostavijo, saj se problem prevede z dveh dimenzij na eno in izognemo se večini časovnih odvisnosti:

$$r = r_0, \qquad \varphi = \omega t,$$

$$v_r = 0, \qquad v_\varphi = r_0 \omega,$$
$$a_r = 0, \qquad a_\varphi = 0.$$

Za sam izračun dolžine meta, nas npr. zanima celotna hitrost kladiva ob metu, torej $v_0 = v_\varphi$ oz. $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

1.0.5 48. NALOGA

Za dolžino leta žogice lahko uporabimo enačbo iz 43. NALOGE:

$$s = \frac{v^2 \sin 2\varphi}{g},$$

oz. če jo napišemo v diferenčni obliki (s pomočjo odvajanja):

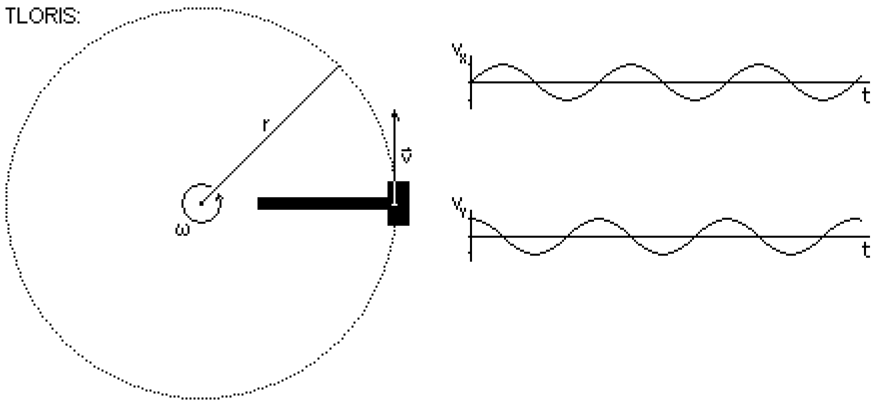
$$\Delta s = \frac{\partial s}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial s}{\partial \varphi} \Delta \varphi = \frac{2v \sin 2\varphi}{g} \Delta v + \frac{2v^2 \cos 2\varphi}{g} \Delta \varphi.$$

Lahko se zmotimo za razdaljo $\Delta s = d$. Če natanko zadanemo kot $\Delta \varphi = 0$, lahko hitrost zgrešimo za:

$$\Delta v = \frac{dg}{2v \sin 2\varphi},$$

če pa natanko zadanemo hitrost $\Delta v = 0$, lahko kot zgrešimo za:

$$\Delta \varphi = \frac{dg}{2v^2 \cos 2\varphi}.$$



Slika 1: 49. NALOGA - met kladiva

1.0.6 49. NALOGA

1.0.7 50. NALOGA

Trajektorija žoge mora iti nad mrežo in se končati pred koncem igrišča. Trajektorijo dobimo, če v enačbi za višino (z komponento lege) v odvisnosti od časa:

$$z = h_0 + v_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2}$$

čas izrazimo iz enačbe za x komponento lege v odvisnosti od časa:

$$x = v_0 t \cos\varphi \quad \rightarrow \quad t = \frac{x}{t\cos\varphi}.$$

Višina je kvadratna enačba od x:

$$z(x) = h_0 + \mathrm{ctg}\varphi\, x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}x^2.$$

Za uspešen met mora torej veljati $z(a+d) > b$ in $z(2a+d) < 0$.

2 B.2 Dinamika - teoretične naloge

2.0.8 66. NALOGA

Kvadratni zakon upora pravi, da na telo, ki se premika glede na tekočino (kapljevino ali plin) okoli njega z neko hitrostjo, deluje sila, ki je sorazmerna s kvadratom te hitrosti:

$$F_{\text{kvad.}} = \frac{1}{2}c_u\rho v^2 S.$$

Poleg hitrosti je odvisen še od koeficienta upora c_u, gostote tekočine ρ in preseka telesa S. Dobro velja takrat, ko je sila kvadratnega zakona upora dosti večja od sile linearnega zakona upora (povezana z viskoznostjo tekočine), kar nam pove Reynoldsovo število Re:

$$Re = 2R\rho v/\eta,$$

kjer so R dimenzija telesa, ρ gostota in η viskoznost tekočine. Ko je $Re > 1000$, kvadratni zakon upora velja na nekaj odstotkov natančno.

2.0.9 67. NALOGA

- sila ($\vec{F}$) - opisuje pospešek telesa z dano maso $\vec{F} = m\vec{a}$.
- gibalna količina ($\vec{G}$) - opisuje premikanje mase v neki smeri $\vec{G} = \vec{m}v$, delovanje sile v času Δt spremeni gibalno količino $\Delta\vec{G} = \vec{F}\Delta t$.
- delo (A) - opisuje energijo, ki jo potrebujemo, da delujemo s silo $\vec{F}$ na razdalji $\vec{s}$, $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$.
- moč (P) - opisuje, koliko dela smo opravili na časovno enoto $P = A/t$.

2.0.10 68. NALOGA

Če problem smučarja v radiusu obravnavamo v inercialnem (nepospešenem) sistemu - sistemu smučišča, nanj delujeta sili gravitacije in podlage. Ker privzamemo, da ni trenja, kaže sila podlage pravokotno na površino oz. v najnižji točki navpično navzgor. Rezultanta sil je centripetalna sila, zaradi katere smučar zavije navzgor. V neinercialnem (pospešenem) sistemu - sistemu smučarja, pa smučar čuti navidezno, centrifugalno silo, ki ga pritiska ob tla, ker želi njegovo telo potovati v ravni črti, smučišče pa mu tega ne omogoča.

2.0.11 69. NALOGA

- radialna sila - pri zavijanju deluje pravokotno na smer hitrosti, povzroča spremembo smeri
- centripetalna sila - deluje na telo proti središču vrtenja
- centrifugalna sila - navidezna sila v lastnem sistemu smučarja, ki se pojavi zaradi spremembe smeri gibalne količine

Na smučarja, ki se pelje preko grbine, v najvišji točki delujeta sila težnosti, ki kaže navzdol, ter sila podlage, ki kaže navzgor. Vsota teh dveh sil je radialna sila, v našem primeru centripetalna sila, ki kaže prav tako navzdol, ker bo smučar krožil okrog grbine. Smučar bo v lastnem neinercialnem sistemu čutil, da se je sila tal na njega zmanjšala, ker želi njegovo telo potovati v ravni črti, torej teži k odlepljenju s površine, ki se bo zgodilo, ko bo komponenta gravitacije v smeri proti površini zadosti majhna.

2.0.12 70. NALOGA

Pri vsakem primeru zavijanja gre za silo podlage, konkretneje silo lepenja, ki deluje prečno na smer gibanja in preprečuje zdrs. Pri kolesarju in dirkalnem avtomobilu v zavoju gre za lepenje med sprednjimi gumami in cesto, saj obrat sprednjih koles določa spremembo smeri glede na prvotno smer gibanja. Pri smučarju in drsalcu v zavuje je zadeva podobna, razlika je le v tem, da pri njima drsalke ali smuči drsijo v smeri gibanja (gre za trenje, ne lepenje), prečno na smer pa se tudi pri njih pojavi lepenje. Smer zavoja določata oblika smučke/drsalke in nagib človeka.

2.0.13 71. NALOGA

Na smučarja na vrhu grbine delujeta v inercialnem (nepospešenem) sistemu sila težnosti $\vec{F}_g$ in sila podlage $\vec{F}_p$. Ker gre za vrh grbine in ker trenje in zračni upor nista prisotna, lahko rečemo da sila podlage deluje navpično navzgor, težnost pa seveda navpično navzdol, tako je tudi njuna rezultanta v tej smeri. Sklepamo lahko, da kaže rezultanta navzdol, saj je zaradi ukrivljenosti površine (če gre za grbino s konstantnim radijem ukrivljenosti) sila podlage manjša od sile teže. V neinercialnem sistemu bo zaradi ukrivljene poti smučar občutil manjšo silo teže.

2.0.14 72. NALOGA

Na kolesarja v ovinku delujeta sila teže $\vec{F}_g$ in sila podlage $\vec{F}_p$. Ker zavija, je nagnjen na eno stran, če želimo, da ne pade, pa mora biti v ravnotežju, torej kolo ne sme spreminjati nagiba glede na vodoravno ravnino. Če zapišemo enačbe, ki veljajo za sile in navore, najprej razdelimo silo podlage na dve komponenti, navpično komponento $\vec{F}_{p0}$ in komponento, ki kaže v smeri zavijanja, $\vec{F}_l$. Veljati mora:

$$\vec{F}_{p0} = -\vec{F}_g,$$

saj se kolesarju ne spreminja hitrost v vertikalni smeri - predpostavimo namreč, da zavoj poteka v vodoravni ravnini. Prav tako mora veljati:

$$F_l = \frac{mv^2}{r},$$

kjer sta m masa in v hitrost kolesarja, r pa je radij zavoja. Povezali smo torej vodoravno komponento sile podlage in radialni pospešek, s čimer smo razložili enakomerno zavijanje. Preostane torej še nagib kolesa. Če želimo, da bo vsota navorov na kolesarja enaka 0, torej da se ne bo začel rotirati - spreminjati nagiba, mora sila podlage kazati skozi težišče kolesarja. Veljati mora torej:

$$F_{p0}\mathrm{tg}\varphi = F_l,$$

kjer je φ kot nagiba kolesarja.

2.0.15 73. NALOGA

Na telovadca delujeta sila droga $\vec{F}_d$ in sila težnosti $\vec{F}_g$. Sila droga kaže samo v radialni smeri, težnost pa ima radialno in tangencialno komponento. Vsota sile droga in radialne komponente sile težnosti nam da radialni pospešek, ki pa je seveda odvisen od kotne hitrosti veletoča. Če kot zasuka definiramo kot kot med telovadcem in vertikalno osjo, lahko napišemo:

$$F_d + F_g \cos\varphi = ma_r = m\omega^2(\varphi)r,$$

kjer so količine pozitivne, če kažejo proti središču. Kotna hitrost je kotno odvisna, saj se telovadcu povečuje, ko se spušča, in zmanjšuje, ko se dviga. To kotno pospeševanje se zgodi zaradi navora, ki ga ustvarja težnost. Samo kotno hitrost lahko izračunamo iz energije (zanemarimo energijske izgube in obravnavamo samo pretvorbe energije iz kinetične v potencialno:

$$E_{\mathrm{kin}}(\omega) = \frac{J\omega^2(\varphi)}{2} = \frac{mr^2\omega^2(\varphi)}{2},$$

$$E_{\mathrm{pot}}(\varphi) = mgr(1-\cos\varphi),$$
$$\frac{mr^2\omega_0^2}{2} + mgr(1-\cos\varphi) = \frac{mr^2\omega^2(\varphi)}{2},$$
$$\omega(\varphi) = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2g}{r}(1-\cos\varphi)},$$

kjer smo z ω_0 označili kotno hitrost pri kotu $\varphi = 0$, torej na vrhu veletoča. Če to vstavimo v enačbo za silo droga, dobimo:

$$F_d(\varphi) = m\omega_0^2 r + F_g(2 - 3\cos\varphi).$$

2.0.16 74. NALOGA

Glej skico pri 72. NALOGI. Kolesar je stabilen (kolo se ne nagiba) takrat, ko rezultanta sil na njegovo težišče leži v ravnini, ki jo tvori z stičnima točkama koles s cestiščem.

- a.) Zaradi povečanja ostrine zavoja se (pri enaki obodni hitrosti) poveča radialni pospešek, kolesar se mora toraj bolj nagniti v zavoju.
- b.) Kolesarju se težišče premakne v ravnini s stičnimi točkami, tako rezultanta sil še zmeraj leži v isti ravnini in kolesarju ni treba popravljati nagiba.
- c.) Ker hitrost kolesarja ostaja enaka, je tudi radialni pospešek še vedno enak, nagiba kolesa torej ni treba popravljati.
- d.) Če kolesar poveča hitrost, se mora spremeniti tudi radialni pospešek, kolesar se mora torej bolj nagniti na kolesu.
- e.) Pri prečni spremembi nagiba cestišča se v povezavi s samim ravnotežjem ne spremeni nič. Spremeni se sila trenja, ki nam omogoča oprijemanje cestišča, če se trenje preveč zmanjša, se pojavi nevarnost zdrsa.

2.0.17 75. NALOGA

Pri smučarju je podobno, vsota sil podlage mora kazati skozi težišče, če želimo, da bo smučar stabilen.

- f.) Spremeni se višina težišča in (najbrž) tudi sila trenja. Posledično je treba spremeniti položaj težišča.
- g.) Vzdolžno ravnotežje se nič ne pokvari, je pa treba težišče prečno prilagoditi.
- h.) Spremeni se naklon podlage in zato se poveča sila podlage, treba je spremeniti položaj težišča.
- i.) Pri ostrem zavoju se pojavi radialni pospešek, ki deluje prečno, a pojavi se tudi tangencialni pospešek, ki povzroči, da moramo težišče vzdolžno popraviti.
- j.) Če se sprememba težišča glede na smuči pojavi le v vertikalni smeri, je najbrž potrebna neka sprememba tudi v horizontalni.

2.0.18 77. NALOGA

Ko igralec udari žogico, nanjo deluje s sunkom sile. Če je ta sunek sile pravokoten na površino žogice, torej kaže skozi njeno središče, je to centrični udarec, ki ne pozroči rotacije - spremembe vrtilne količine, temveč samo spremeni njeno gibalno količino:

$$\vec{G}_0 + \vec{F}\Delta t = \vec{G}_1,$$

kjer sta $\vec{G}_0$ in $\vec{G}_1$ gibalna količina žogice tik pred in tik po udarcu z loparjem, $\vec{F}$ pa je sila, s katero z loparjem delujemo na žogico za Δt časa. V vodoradni smeri se žogici gibalna količina ne bo spreminjala $G_{1x} \neq G_{1x}(t)$, v navpični smeri, pa se gibalna količina ves čas spreminja zaradi gravitacije, ki neprestano deluje na žogico, torej to lahko opišemo kot sunek sile težnosti, ki povzroča, da se ji gibalna količina navzdol neprestano povečuje. Tir žogice ni ravna črta, ampak je tako kot pri poševnem metu - parabola. Če želimo, da bo žogica letela na nasprotnikovo stran mize, mora iti nad mrežico in pred koncem mize mora pasti na tla.

Če želimo žogico z loparjem zavrteti, mora lopar izkoristiti silo lepenja oz. trenja, torej žogico moramo udariti tako, da sunek sile ne bo kazal skozi središče žogice, temveč bo zaradi prispevka sile lepenja vsota sil na žogico kazala mimo središča žogice. Sunek navorov tako ne bo enak nič in žogici se bo spremenila vrtilna količina - začela se bo vrteti. To smo naredili tako, da z loparjem nismo udarili žogice naravnost, temveč smo ga premikali tudi pravokotno na smer žogice.

2.0.19 79. NALOGA

Sprememba gibalne količine je enaka sunku sile:

$$\Delta\vec{G} = \vec{F}\Delta t.$$

Če zakon razložimo na primeru udarca packa s hokejsko palico, pri katerem se mu hitrost spremeni z $\vec{v}_1$ na $\vec{v}_2$:

$$\Delta\vec{G} = \vec{G}_2 - \vec{G}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}\Delta t,$$

$$m\vec{v}_2 = m\vec{v}_1 + \vec{F}\Delta t.$$

Ko s palico udarimo pack, nanj za kratek čas Δt delujemo z neko silo $\vec{F}$. Produktu obeh količin pravimo sunek sile.

2.0.20 80. NALOGA

Za gibalno količino velja $\Delta\vec{G} = \vec{F}\Delta t$, zaradi prožnosti trka pa se v sistemu loparja žogici ne spremeni celotna kinetična energija. Pri centralnem trku sunek sile deluje na zveznici *prijemališče sile - težišče žogice.* Sunek navora je v tem primeru enak 0 (ker je ročica enaka 0) in žogica se ne začne vrteti. Kinetična energija je tako še naprej brez rotacijskega člena.

Pri necentralnem trku pa sunek sile ne deluje v smeri težišča, zato se pojavi tudi sunek navora, ki spremeni vrtilno količino, - žogica se začne vrteti. Kinetična energija žogice pred trkom se tako razdeli na kinetično energijo žogice po trku in še rotacijski kinetični del zaradi vrtenja.

2.0.21 81. NALOGA

Če zanemarimo trenje smuči na snegu in zračni upor, potem se samo potencialna energija smučarja pretvarja v njegovo kinetično energijo. Na enakomerni strmini se smučarju tako veča hitrost, na ravnem izteku pa se mu hitrost ne spreminja več.

Če vzamemo v obzir še disipacijo energije v sneg oz. zrak, pa moramo upoštevati še pretvorbo kinetične energije v notranjo energijo snega oz. zraka. V tem primeru se (predvsem zaradi kvadratnega zakona zračnega upora) smučar na enakomerno strmem delu pospešuje le do neke zgornje meje, na ravnem izteku pa se mu hitrost polagoma zmanjšuje.

2.0.22 82. NALOGA

Padalec ima tik pred skokom (na višini h) potencialno energijo glede na tla:

$$E_{\mathrm{pot}} = mgh$$

in kinetično energijo glede na zemljo zaradi hitrosti letala:

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{mv_{\mathrm{letalo}}^2}{2}.$$

Po skoku lahko njegovo hitrost razdelimo na dve komponenti v_z, ki je v smeri zemlje, in v_x, pravokotno na zemljo. Zaradi upora zraka se mu v_x komponenta hitrosti, ki je ob začetku enaka v_{letalo} samo zmanjšuje. Druga komponenta, ki je ob začetku enaka 0, pa se začne povečevati toliko časa, da se sila zračnega upora ne izenači s silo gravitacije. Potencialna energija se torej pretvarja v kinetično, ta pa v notranjo energijo zraka.

2.0.23 83. NALOGA

Glej skico pri 73. NALOGI. Zapišimo najprej enačbo za ohranitev energije:

$$E_{\mathrm{kin1}} + E_{\mathrm{pot1}} = E_{\mathrm{kin2}} + E_{\mathrm{pot2}} + E_{\mathrm{izgube}},$$

kjer se začetna kinetična in potencialna energija pretvorita v končno kinetično in potencialno energijo in še notranjo energijo droga in zraka zaradi trenja in upora. Če nastavimo ničlo potencialne energije na najvišjo točko težišča in izrazimo kinetično energijo z vztrajnostnim momentom in kotenimi hitrostmi, dobimo:

$$\frac{J\omega^2(\varphi)}{2} = \frac{J\omega_0^2}{2} + mgr(1-\cos\varphi) - E_{\mathrm{izgube}}.$$

V primeru točkastega telesa, velja $J = mr^2$, v primeru togega telesa pa $J = \frac{mr^2}{3}$. Če zanemarimo energijske izgube, bo torej imel v najnižji točki $\varphi = \pi$ v primeru točkastega telesa kotno hitrost:

$$\omega_{\mathrm{max}} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{4g}{r}},$$

v primeru togega telesa pa:

$$\omega_{\mathrm{max}} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{12g}{r}}.$$

Če želimo, da pride telovadec nazaj v stojo kljub trenju in uporu, mora veljati, da je začetna kinetična energija večja od energijskih izgub pri enem obratu:

$$\frac{J\omega_0^2}{2} > E_{\mathrm{izgube}}.$$

2.0.24 86. NALOGA

Glej 83. NALOGO. Največjo potencialno energijo ima atlet v stoji, saj je takrat njegovo težišče najviše. Največjo kinetično energijo ima v najnižji točki, ko ima tudi najmanjšo potencialno energijo. Če upoštevamo še energijske izgube, se mu celotna energija ves čas manjša, dokler se ne neha zibati. Energijske izgube telovadec kompenzira z uporabo svojih mišic, torej s pretvorbo svoje notranje energije v kinetično energijo.

2.0.25 89. NALOGA

Najprej ima skakalec samo potencialno energijo. Ko skoči, se mu do točke, kjer se začne napenjati vrv, potencialna energija spreminja zgolj v kinetično (upor zraka smo zanemarili). Od tiste točke naprej pa se potencialna energija spreminja tudi v prožnostno. Ko se izenačita sili gravitacije in elastike (ker je napeta, se želi skrčiti in zavira skakalca), se začne skakalcu manjšati tudi kinetična energija, do točke, kjer se čisto upočasni, se tako vsa potencialna in kinetična energija pretvorita v prožnostno energijo elastike.

V prvem režimu, dokler se elastika ne začne napenjati, velja:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_g, \qquad \frac{mv(h)^2}{2} = mgh, \qquad 0 \leq h \leq a.$$

kjer je h definiran kot razdalja med skakalcem in začetno točko skoka. Vsota sil, ki delujejo na skakalca je samo sila teže, kinetična energija pa je enaka spremembi potencialne energije. V drugem režimu se vključi tudi elastika:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_e = m\vec{g} + k\vec{x}, \qquad |\vec{x}| = h - a,$$

$$\frac{mv(h)^2}{2} + \frac{k(h-a)^2}{2} = mgh, \qquad a \leq h \leq a + b.$$

Če pogledamo skrajne točke vseh energij, lahko za potencialno energijo rečemo, da sta njeni skrajni točki na najvišji in najnižji točki skoka:

$$E_{\text{pot. max}} = E_{\text{pot.}}(h = 0) = 0, \qquad E_{\text{pot. min}} = E_{\text{pot.}}(h = a + b) = -mg(a + b).$$

Minimum elastične energije je od začetka skoka vse do trenutka, ko se začne napenjati, maksimum pa je v najnižji točki skoka:

$$E_{\text{elast. min}} = E_{\text{elast.}}(0 \leq h \leq a) = 0, \qquad E_{\text{elast. max}} = E_{\text{elast.}}(h = a + b) = \frac{kb^2}{2}.$$

Minimuma kinetične energija sta v najvišji in najnižji točki skoka, maksimum pa je v tisti točki, ko sta izenačeni sila teže in sila elastike:

$$E_{\text{kin. min}} = E_{\text{kin.}}(h = 0) = E_{\text{kin.}}(h = a + b) = 0,$$

$$E_{\text{kin. max}} = E_{\text{kin.}}(h = \frac{mg}{k} + a) = \frac{(mg)^2}{2k} + mga,$$

kjer smo višino pri maksimumu izračunali z izenačenjem obeh sil, njeno vrednost pa z vstavljenjem višine v enačbo o energijah.