1. kolokvij iz Tehniške matematike

Fakulteta za strojništvo

21. november 2008

A

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Naloge so 4, vsaka je vredna 25 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1a. (10) Poiščite vse realne rešitve enačbe

$$|1-x| + |2x-1| + x = 3$$

Rešitev: Najprej zapišemo:

$$|1-x| = \left\{ \begin{array}{rl} 1-x, & x \leq 1 \\ -(1-x), & x > 1 \end{array} \right. , \qquad |2x-1| = \left\{ \begin{array}{rl} 2x-1, & x \geq \frac{1}{2} \\ -(2x-1), & x < \frac{1}{2} \end{array} \right. .$$

Pri reševanju torej ločimo tri primere:

1. $x < \frac{1}{2}$: *Enačba* $1 - x - (2x-1) + x = 3$ *ima rešitev* $x = -\frac{1}{2}$.
2. $\frac{1}{2} \leq x < 1$: *Enačba* $1 - x + 2x - 1 + x = 3$ *ima rešitev* $x = \frac{3}{2}$, *ki pa ni v intervalu* $[\frac{1}{2}, 1)$.
3. $x \geq 1$: *Enačba* $-(1-x) + 2x - 1 + x = 3$ *ima rešitev* $x = \frac{5}{4}$.

Rešitvi dane enačbe sta $x = -\frac{1}{2}$ *in* $x = \frac{5}{4}$.

1b. (15) Poiščite vse realne rešitve neenačbe

$$|2x-1| > 2 - |x|$$

Rešitev: Podobno kot zgoraj zapišemo:

$$|2x-1| = \left\{ \begin{array}{rl} 2x-1, & x \geq \frac{1}{2} \\ -(2x-1), & x < \frac{1}{2} \end{array} \right. , \qquad |x| = \left\{ \begin{array}{rl} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{array} \right. .$$

Pri reševanju torej ločimo tri primere:

1. $x < 0$: *Neenačba* $-(2x-1) > 2 + x$ *ima rešitev* $x < -\frac{1}{3}$.
2. $0 \leq x < \frac{1}{2}$: *Neenačba* $-(2x-1) > 2 - x$ *ima rešitev* $x < -1$, *kar pa ni na intervalu* $[0, \frac{1}{2})$.
3. $x \geq \frac{1}{2}$: *Neenačba* $2x - 1 > 2 - x$ *ima rešitev* $x > 1$.

Končna rešitev dane neenačbe je unija intervalov $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$.

2a. (15) Izračunajte absolutno vrednost kompleksnega števila

$$w = (1+2i)^2 + \frac{3+4i}{2-i} - i^{197}.$$

Rešitev: Kompleksno število poenostavimo tako, da prvi izraz kvadriramo in ulomek pomnožimo v števcu in imenovalcu s konjugirano vrednostjo imenovalca:

$$\begin{aligned} w &= 1+4i-4+\frac{3+4i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i} - i \\ &= -3+4i+\frac{2+11i}{5} - i \\ &= -\frac{13}{5}+\frac{26}{5}\,i. \end{aligned}$$

Absolutna vrednost števila w je enaka

$$|w| = \sqrt{(-\frac{13}{5})^2 + (\frac{26}{5})^2} = \frac{13}{5}\sqrt{5}.$$

2b. (10) Rešite enačbo

$$(4+i)z - \overline{z} = 8i$$

Rešitev: Zapišemo $z = a + ib$, upoštevamo $\bar{z} = a - ib$ in dobimo enačbo

$$3a + 5bi + ai - b = 8i.$$

Dve kompleksni števili sta enaki, če imata enaka realna in imaginarna dela. Tako dobimo dve enačbi:

$$3a - b = 0, \qquad 5b + a = 8,$$

ki imata rešitvi $a = \frac{1}{2}$ in $b = \frac{3}{2}$. Rešitev dane enačbe je torej

$$z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,i.$$

3a. (15) Izračunajte realni in imaginarni del števila

$$(1+i)^{13} + (i-\sqrt{3})^6$$

Rešitev: Obe kompleksni števili zapišemo v polarni obliki in uporabimo pravilo potenciranja

$$\begin{aligned}
1+i &= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \\
(1+i)^{13} &= (\sqrt{2})^{13}(\cos 13\cdot\frac{\pi}{4} + i\sin 13\cdot\frac{\pi}{4}) \\
&= 2^6\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) \\
&= -2^6(1+i). \\
i-\sqrt{3} &= 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) \\
(i-\sqrt{3})^{13} &= 2^6(\cos 6\cdot\frac{5\pi}{6} + i\sin 6\cdot\frac{5\pi}{6}) \\
&= 2^6(\cos\pi + i\sin\pi) \\
&= -2^6.
\end{aligned}$$

Realni del danega kompleksnega števila je enak -2^7, imaginarni del pa -2^6.

3b. (10) Rešite enačbo $z^5 = (1-2i)^2 - 1$.

Rešitev: Desno stran enačbe preuredimo in jo zapišemo v polarni obliki

$$z^5 = (1-2i)^2 - 1 = 1 - 4i - 4 - 1 = -4 - 4i = \sqrt{32}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}).$$

Po formuli za korenjenje dobimo:

$$\begin{aligned}
z = \sqrt[5]{-4-4i} &= \sqrt[5]{\sqrt{32}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{5}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{5})\right), \quad k = 0,1,2,3,4.
\end{aligned}$$

4a. (10) V paralelogramu $ABCD$ naj bo $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$. Točka E deli diagonalo BD v razmerju 2:5, točka F razpolavlja stranico AB. Izrazi vektor $\overrightarrow{EF}$ z $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$.

Rešitev:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} \\
&= -\frac{2}{7}(-\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{a} \\
&= -\frac{3}{14}\overrightarrow{a} - \frac{2}{7}\overrightarrow{b}.
\end{aligned}$$

4b. (15) Naj bo točka S presečišče daljic AE in DF. Določite razmerje $|FS| : |SD|$.

Rešitev: Vektor $\overrightarrow{FS}$ zapišemo na dva različna načina:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FS} &= \alpha\overrightarrow{FD} \\
&= \alpha(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \\
\overrightarrow{FS} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{AE} \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \beta(\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \frac{3}{14}\overrightarrow{a} + \frac{2}{7}\overrightarrow{b}) \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \beta(\frac{5}{7}\overrightarrow{a} + \frac{2}{7}\overrightarrow{b}).
\end{aligned}$$

Izraza izenačimo:

$$\alpha(-\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{a} + \beta(\frac{5}{7}\overrightarrow{a} + \frac{2}{7}\overrightarrow{b})$$

$$(-\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} - \frac{5}{7}\beta)\overrightarrow{a} + (\alpha - \frac{2}{7}\beta)\overrightarrow{b} = 0$$

Dobimo sistem enačb

$$-\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} - \frac{5}{7}\beta = 0, \qquad \alpha - \frac{2}{7}\beta = 0,$$

ki ima rešitev $\alpha = \frac{1}{6}$, $\beta = \frac{7}{12}$. Iskano razmerje je torej enako $|FS| : |SD| = 1 : 5$.