2. kolokvij iz Tehniške matematike

Fakulteta za strojništvo

9. januar 2009

A

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Naloge so 4, vsaka je vredna 25 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
Skupaj			

1. Oglišča tetraedra so v točkah

$$A(-1,2,1),\ B(0,2,3),\ C(3,-1,2) \text{ in } D(2,-4,1).$$

a. (15) Izračunajte prostornino tetraedra.

Rešitev: Kot vemo, je prostornina tetraedra, določenega z vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ *in* $\overrightarrow{c}$ *enaka*

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})|.$$

V našem primeru je $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = (1,0,2)$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC} = (4,-3,1)$ *in* $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AD} = (3,-6,0)$ *in zato*

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} = -24.$$

Sledi $V = 4$.

b. (10) Izračunajte kot med robovoma AB in AD.

Rešitev: Izračunati moramo kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ *in* $\overrightarrow{c}$*:*

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{c}|} = \frac{3}{\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{1}{5},$$

$$\varphi \doteq 78,46^\circ.$$

2a. (15). Ali točke $A(-1,2,1)$, $B(0,2,3)$, $C(3,-1,2)$ in $D(2,-1,0)$ ležijo na isti ravnini?

Rešitev: Preverimo lahko, če je prostornina paralelepipeda, določenega z vektorji $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AD}$ enaka 0:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

2b. (10) Izračunajte kot med premico $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$ in ravnino $x - 3y + 2z = 6$.

Rešitev: Najprej izračunamo kot φ med normalo ravnine $\overrightarrow{n} = (1,-3,2)$ in smernim vektorjem premice $\overrightarrow{s} = (2,3,2)$.

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{s}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{s}|} = \frac{-3}{\sqrt{14}\sqrt{17}}.$$

Sledi, da je $\varphi \doteq 101,21^\circ$, torej je iskani kot med ravnino in premico $\alpha \doteq 11,21^\circ$.

3. Dan je sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y - z &= 4 \\ 3x + 2y + bz &= a \end{aligned}$$

a. (15) Naj bo $b = 1$. Določite parameter a tako, da bo sistem rešljiv in ga v tem primeru tudi rešite.

Rešitev: Uporabimo Gaussov postopek

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & a-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix}.$$

Sistem je rešljiv le če je $a = 5$ in rešitev je v tem primeru dana z

$$\left(-t + \frac{7}{5}, t + \frac{2}{5}, t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

b. (10) Pri katerih vrednostih parametrov a in b je sistem

- protisloven?
- ima neskončno rešitev?
- enolično rešljiv?

Rešitev: Podobno kot zgoraj dobimo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & b & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 5 & b-6 & a-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & b-1 & a-5 \end{bmatrix}.$$

Sledi

- *sistem je protisloven, če je $b = 1$ in $a \neq 5$,*
- *sistem ima neskončno rešitev pri $b = 1$ in $a = 5$,*
- *sistem je enolično rešljiv pri $b \neq 1$ in poljubnem a.*

4. Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 6 & -14 \end{bmatrix}$.

a. (15) Izračunajte matriko X za katero velja $B - XA = X$.

Rešitev: Najprej iz dane matrične enačbe izrazimo X:

$$X = B(I + A)^{-1}.$$

Ker je $I + A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ *in* $(I + A)^{-1} = -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, *sledi*

$$X = -\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 6 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

b. (10) Izračunajte lastni vrednosti in lastna vektorja matrike A.

Rešitev: Najprej določimo lastni vrednosti iz enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) - 12 = (\lambda+5)(\lambda-3) = 0.$$

Lastni vrednosti sta $\lambda_1 = -5$ *in* $\lambda_2 = 3$.
(1) Pri $\lambda = -5$ *iz matrične enačbe*

$$(A - \lambda I)\overrightarrow{x} = 0 \text{ oziroma } \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo lastni vektor $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq 0.$
(2) Pri $\lambda = 3$ *iz matrične enačbe*

$$(A - \lambda I)\overrightarrow{x} = 0 \text{ oziroma } \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo lastni vektor $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 3x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_2 \neq 0.$