TEHNIŠKA MATEMATIKA

Naloge za 1. kolokvij

Fakulteta za strojništvo

Realna števila:

Rešite naslednje neenačbe:

1. $|2x+1| < |x-1| + x$
2. $|x-1| + x \leq |2x+3|$
3. $|x-3| - 1 < |3 - |x||$
4. $|x-3| - 1 \leq |2 - |1-x||$
5. $x^2 - 3|x-1| - 3 \leq 0$
6. $|x^2 - |x|| \leq 3|x+1|$
7. $|x/(x+4)| < 1$
8. $|x^2 - 1| \leq |x|$
9. Določite števili a in b tako, da bo enačba
$$||ax-b|-2| = 3$$
imela rešitve $x = -1$, $x = 0$ in $x = 1$.
10. Narišite graf funkcije
$$f(x) = |x| + |x-3| - 2$$
in z grafa odčitajte rešitve neenačbe $f(x) \leq 3$.

Kompleksna števila:

Izračunajte:

11. $\dfrac{1-i}{2+3i} + \dfrac{i}{-i+3}$
12. $\dfrac{(1-i)^{20} - 5i}{2 + i + (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)^{30}}$

Rešite naslednje enačbe:

13. $z^3 = (-1+i)^6$
14. $|z| - 1 = 2\overline{z} - z - 15i$
15. $(2+i)z = |z|^2 + 1 + i$

16. $|z - 3 - i| = |z + 2i|$

17. Pokažite, da za poljubni kompleksni števili z_1 in z_2 velja enakost

$$|1 - \overline{z_1} z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$

18. Preverite, da za poljubna kompleksna števila a, b, c in d velja

$$|a - b|^2 + |b - c|^2 + |c - d|^2 + |d - a|^2 = |a - c|^2 + |b - d|^2 + |a - b + c - d|^2$$

19. Določite realni in imaginarni del kompleksnega števila

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1},$$

kjer sta z_1 in z_2 rešitvi kvadratne enačbe

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

20. Število $w = \sqrt{3} + i$ zapišite v polarni obliki in nato določite vsa kompleksna števila z, ki zadoščajo paru enačb

$$Re(w^4 z) = 0, \qquad |z| = 2$$

21. Določite vsa kompleksna števila w, ki zadoščajo enačbi

$$w^6 = -1,$$

in nato pokažite, da imajo rešitve z enačbe

$$\left(\frac{1 + z}{z}\right)^6 = -1$$

realni del $Re(z) = -1/2$.

22. Izračunajte kompleksno število

$$w = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)^{21}$$

in nato poiščite vsa kompleksna števila z, ki ustrezajo enačbi

$$z(\overline{z} - 1) = w + 3$$

Vektorji:

23. V paralelogramu $ABCD$ leži točka M na stranici AB in jo deli v razmerju $2 : 1$. Presečišče diagonale BD z daljico MC označimo z S. V kakšnem razmerju točka S deli daljico MC?

24. V pravokotniku $ABCD$ točka F deli diagonalo AC v razmerju $1:4$ in točka G deli stranico DC v razmerju $1:3$. Izrazite vektor $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{FG}$ z vektorjema $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AD}$ in v primeru, ko je $\|\overrightarrow{a}\| = 20$ in $\|\overrightarrow{b}\| = 5$, izračunajte njegovo dolžino.

25. Preverite identiteto

$$\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|^2 + \|\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\|^2 + \|\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}\|^2 = \|\overrightarrow{a}\|^2 + \|\overrightarrow{b}\|^2 + \|\overrightarrow{c}\|^2 + \|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\|^2$$

26. Z izračunom produkta $\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|^2\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|^2$ izpeljite, da za poljubna vektorja $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ velja neenakost

$$\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|\,\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\| \le \|\overrightarrow{a}\|^2 + \|\overrightarrow{b}\|^2$$

27. Izpeljite paralelogramsko enakost

$$\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|^2 + \|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\|^2 = 2(\|\overrightarrow{a}\|^2 + \|\overrightarrow{b}\|^2)$$

Podajte geometrijsko tolmačenje in razložite od kod ime paralelogramska enakost.

28. Izračunajte kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$, če je $\|\overrightarrow{a}\| = \|\overrightarrow{b}\| = \|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\|$.

29. Določite kot med vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, kjer je $\|\overrightarrow{a}\| = 4$, $\|\overrightarrow{b}\| = 2$, kot med $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ pa je $\pi/3$.

30. Določite vektor $\overrightarrow{c}$, kolinearen vektorju $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, če je

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 5, \qquad \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b} = 18, \qquad \|\overrightarrow{b}\| = 2$$

31. Dani so vektorji

$$\overrightarrow{a} = (1,1,2), \quad \overrightarrow{b} = (2,-1,0), \quad \overrightarrow{c} = (1,-1,-1), \quad \overrightarrow{d} = (7,0,5)$$

Pokažite, da so vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ linearno neodvisni in izrazite vektor $\overrightarrow{d}$ kot njihovo linearno kombinacijo.

32. Točke $B(10,0,0)$, $C(8,3,-2)$, $D(-2,3,-2)$ in $E(5,3,4)$ skupaj s točko A tvorijo piramido $ABCDE$, ki ima za osnovno ploskev paralelogram $ABCD$. Določite koordinate točke A, kot med robovoma AB in AE, volumen in površino piramide.

33. Oglišča tetraedra z osnovno ploskvijo ABC in vrhom V so

$$A(3,1,0), \quad B(4,3,1), \quad C(2,2,0), \quad V(a,0,1)$$

Določite število a tako, da bo prostornina tetraedra enaka 1. V tem primeru izračunajte tudi višino na osnovno ploskev.

34. Če je mešani produkt vektorjev $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$ enak 1, izračunajte mešani produkt vektorjev $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{n} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + 4\overrightarrow{c}$ in $\overrightarrow{p} = 3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - 5\overrightarrow{c}$.

35. Zapišite enačbo premice, ki gre skozi točko $A(2,-3,1)$ in skozi prebodišče premice

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{2}$$

z ravnino $2x-y+z-1=0$.

36. Izračunajte enačbo ravnine, ki gre skozi točko $T(1,1,1)$ in skozi presek ravnin $x-y+2z-1=0$ in $2x+y-z-3=0$.

37. Katera točka na ravnini $3x+4y-2z-12=0$ je najbližja koordinatnemu izhodišču?

38. Poiščite točko B, ki leži glede na premico $x=y=z$ simetrično k točki $A(-1,2,2)$.

39. Določite enačbo ravnine, ki gre skozi točko $T(2,1,-1)$ in pravokotno seče ravnini $2x+2y-z+5=0$ in $3x+2z-4=0$.

40. Določite število a tako, da se bosta sekali premici

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-4}{3} \quad \text{in} \quad \frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-a}{2}$$

Izračunajte presečišče.

41. Na premici

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{3}$$

poiščite točke, ki so od ravnine (xy) oddaljene za 1. Koliko je rešitev?

42. Na ravnini (xy) poiščite točke, ki so od premice

$$x=1,\ \frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{2}$$

oddaljene za 1. Katero množica točk v ravnini (xy) dobimo?