

TEHNIŠKA MATEMATIKA

Naloge za 2. kolokvij

Fakulteta za strojništvo

Limite:

Izračunajte naslednje limite:

1. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \tan^2 x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x - 100} - x)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi/2 - \arctan x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 1)^{\frac{x}{\sin(x-2)}}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+4}\right)^x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+5x)}{x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$, $\lim (1 + \sin 2x)^{\cot x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\frac{1}{x} - \arctan \frac{1}{x}\right)$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3}{x^2-1} + \frac{6x^2+2x-1}{1-2x}\right)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{3x+4}-2}$

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x^2+2x-x}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^4 x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10}}{e^x}$

10. Določite realni števili a in b tako, da bo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2+x+1} - ax - b\right) = 0$.

Zveznost in odvedljivost:

11. Za funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x+1)-1}{(x+1)^2} & ; x < -1 \\ ax + b & ; -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & ; x > 0 \end{cases}$$

določite števili a in b tako, da bo zvezna na vsej realni premici.

12. Določite realni števili a in b tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 3x + a & ; x \leq -2 \\ 2 \arcsin(x + 1) & ; -2 < x \leq 0 \\ be^x + 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

zvezna. Skicirajte graf in določite zalogo vrednosti funkcije f . Z ogledom grafa potrdite, da je f bijektivna in določite inverzno funkcijo f^{-1} .

13. Določite a in b tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} (2x+1)^3 & ; x < -1 \\ a + b \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) & ; -1 \leq x \leq 1 \\ 1 + \ln x & ; x > 1 \end{cases}$$

zvezna. Izračunajte levi in desni odvod funkcije f v $x = -1$ in $x = 1$. Ali je funkcija f odvedljiva?

14. Določite a tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$$

zvezna. Izračunajte levi in desni odvod v $x = 0$.

15. Določite števila a, b, c in d tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + 2 & ; x \geq 1 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & ; -1 < x < 1 \\ (x+2)^3 - 1 & ; x \leq -1 \end{cases}$$

zvezna in odvedljiva.

16. Preverite, da funkcija $f(x) = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2$ zadošča enačbi $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 1$.
17. Preverite, da funkcija $f(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ zadošča enačbi $f'(x) - xf''(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.
18. Preverite, da funkcija $f(x) = \ln(\sin 2x)$ zadošča enačbi $f'''(x) + 3f'(x)f''(x) + (f'(x))^3 = -8 \cot 2x$.
19. Preverite, da funkcija $f(x) = \cos(a \ln x)$ zadošča enačbi $x^2 f''(x) + x f'(x) + a^2 f(x) = 0$.
20. Preverite, da funkcija $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ zadošča enačbi $\sin x \cos x f''(x) - f'(x) = \cos x$.
21. Za funkcijo $f(x) = \cos(m \arcsin x)$ izračunajte $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + m^2 f(x)$.
22. Za funkcijo $f(x) = x^n \cos(\ln x)$, $n \geq 2$, izračunajte $x^2 f''(x) + (1-2n)xf'(x) + (1+n^2)f(x) - \pi$.
23. Za funkcijo $f(x) = \arcsin x$ določite c iz Lagrangeovega izreka na intervalu $[0, 1]$.
24. Izračunajte odvod funkcije $f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1} + 2\arctan x$ na intervalu $(1, \infty)$ in na osnovi tega izpeljite, da je f konstantna in enaka π na tem intervalu.

25. Naj bo $f(x) = x^3 + 3x$ in f^{-1} inverzna funkcija. Izračunajte $(f^{-1})'(0)$.
26. Zapišite enačbi tangente in normale na krivuljo $y = x^2 - 4x + 3$ v točki $x = 3$. Pod kakšnim kotom krivulja seka x -os.
27. Zapišite enačbi tangente in normale na krivuljo $y = x^{\cos x}$ v točki $x = \pi$.
28. Pod kakšnim kotom se sekata krivulji $y = e^x$ in $y = -x + 1$.
29. Pokažite, da se hiperboli $xy = a^2$ in $x^2 - y^2 = b^2$ sekata pod pravim kotom.
30. Izračunajte razdaljo med koordinatnim izhodiščem in normalo na krivuljo $y = e^{2x} + x^2$ v točki $x = 0$.
31. Zapišite enačbo tangente na asteroido $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ v poljubni točki (x_0, y_0) . Pokažite, da je dolžina tistega odseka na tangenti, ki leži med koordinatnima osema, neodvisna od izbire točke (x_0, y_0) na asteroidi.
32. Določite parameter a tako, da bo premica $y = ax$ tangenta na krivuljo $y = e^{2x}$.
33. Naj bosta u in v odvedljivi funkciji. Izračunajte drugi odvod funkcije $f(x) = \sqrt{u^2(x) + v^2(x)}$.
34. Pod kakšnim kotom se sekata krivulji $y = x^2$ in $9x^2 + 16y^2 = 25$.

Diferencial: približno izračunajte

35. $\sin 31^\circ$, $\tan 44^\circ$.
36. $\arctan(1.05)$, $\arcsin(0.45)$.
37. $\sqrt{70}$, $\sqrt[3]{63.8}$

Graf funkcij: poiščite D_f , ničle, pole, asimptote, stacionarne točke, lokalne ekstreme, prevoje, intervale konveksnosti in konkavnosti, intervale naraščanja in padanja, narišite graf.

38. $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$
39. $f(x) = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$
40. $f(x) = \frac{2-2x-x^2}{x+3}$
41. $f(x) = \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x-2)^2}$
42. $f(x) = x \ln^3 x$
43. $f(x) = xe^{-|x|}$
44. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

45. $f(x) = \sin 2x - 2 \sin x$

Iskanje ekstremov:

46. Enakokraki trikotnik je včrtan krogu s polmerom r . Določite x , pri katerem je ploščina maksimalna.
47. Na paraboli $y = x^2$ poiščite točko, ki je najbližja premici $y = 2x - 4$.
48. Elipsi z enačbo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ vrišite pravokotnik tako, da bodo stranice pravokotnika vzporedne osem elipse. Izračunajte maksimalno ploščino tega pravokotnika.
49. Hodnik širine 2m se pravokotno nadaljuje v hodnik širine 4m. Izračunajte največjo dolžino ravne palice, ki jo še lahko prenesemo iz enega hodnika v drugega, če je višina obeh hodnikov 3m.