Izpit iz Tehniške matematike

Fakulteta za strojništvo

23. januar 2009

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1a. (10) Določite enačbo premice, ki je presečišče ravnin

$$-2x + 3y - z = 1 \quad \text{in} \quad 3x + y + z = 2.$$

Rešitev: Eno spremenljivko, npr. z, izberemo za parameter in označimo s t. Potem dobimo enačbi

$$\begin{aligned} -2x + 3y &= 1 + t \\ 3x + y &= 2 - t. \end{aligned}$$

Drugo enačbo pomnožimo s 3 in odštejemo od druge enačbe. Dobimo $x = \frac{5}{11} - \frac{4}{11}t$. Vstavimo nazaj v drugo enačbo in dobimo $y = \frac{7}{11} + \frac{1}{11}t$. Iskana premica ima torej vektorsko enačbo:

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{5}{11}, \frac{7}{11}, 0\right) + t\left(-\frac{4}{11}, \frac{1}{11}, 1\right).$$

1b. (10) Določite kot med ravnino $3x + y + z = 2$ in premico $x = \dfrac{y-2}{3} = z + 1$ na stotinko stopinje natančno.

Rešitev: Najprej izračunamo kot φ med normalo ravnine $\vec{n} = (3, 1, 1)$ in smernim vektorjem premice $\vec{s} = (1, 3, 1)$.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{||\vec{n}|| \, ||\vec{s}||} = \frac{7}{\sqrt{11}\sqrt{11}}.$$

Sledi $\varphi \doteq 50{,}48^\circ$, torej je iskani kot med ravnino in premico $\alpha \doteq 39{,}52^\circ$.

2. Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

2a. (10) Izračunajte matriko $(A + 3B)^2$.

Rešitev: Ker je $A + 3B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$, *je*

$$(A + 3B)^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 27 \\ -63 & -17 \end{bmatrix}.$$

2b. (10) Poiščite lastni vrednosti in lastna vektorja matrike A.

Rešitev: Najprej določimo lastni vrednosti iz enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0.$$

Lastni vrednosti sta $\lambda_1 = 1$ *in* $\lambda_2 = -1$.
(1) Pri $\lambda = 1$ *iz matrične enačbe*

$$(A - \lambda I)\overrightarrow{x} = 0 \text{ oziroma } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo lastni vektor $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq 0$.
(2) Pri $\lambda = -1$ *iz matrične enačbe*

$$(A - \lambda I)\overrightarrow{x} = 0 \text{ oziroma } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo lastni vektor $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_2 \neq 0$.

3a. (10) Z večkratno uporabo L′ Hospitalovega pravila izračunajte limito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}.$$

Rešitev: Računamo

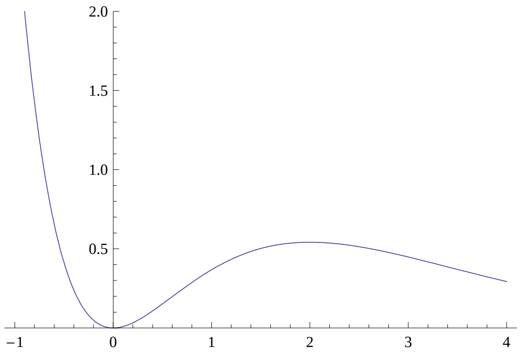
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

3b. (10) Določite največjo in najmanjšo vrednost funkcije $f(x) = x^2 e^{-x}$ na intervalu $[1, 3]$.

Rešitev: Najprej poiščemo stacionarne točke funkcije. Ker je

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = e^{-x}(2x - x^2),$$

je le ena stacionarna točka $x = 2$ na intervalu $[1, 3]$. $f(2) = 4e^{-2}$. Preverimo še vrednosti funkcije na robu intervala: $f(1) = e^{-1}$, $f(3) = 9e^{-3}$. Najmanjša vrednost funkcije na danem intervalu je e^{-1} in je dosežena v levem krajišču $x = 1$, največja vrednost pa je $4e^{-2}$, dosežena v stacionarni točki $x = 2$. Graf funkcije $f(x) = x^2e^{-x}$ je na spodnji sliki.



4a. (15) Rešite linearno diferencialno enačbo

$$y' + y \tan x = \sin x \cos x$$

Rešitev: Najprej rešimo ustrezno homogeno enačbo $y' = -y\ \tan x$*. Ločimo spremenljivki in dobimo*

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx,$$

$$y = C\ \cos x.$$

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom $y = C(x)\ \cos x$*. Tako dobimo enačbo*

$$C'(x) = \sin x,$$

oziroma

$$C(x) = -\cos x.$$

Splošna rešitev naše diferencialne enačbe je torej

$$y(x) = C\ \cos x - \cos^2 x.$$

4b. (5) Poiščite rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju $y(0) = 1$.

Rešitev: Z vstavljanjem dobimo $C = 2$*, torej je rešitev enaka*

$$y(x) = 2\cos x - \cos^2 x.$$

5a. (10) S pomočjo integracije po delih (per-partes) izračunajte nedoločeni integral

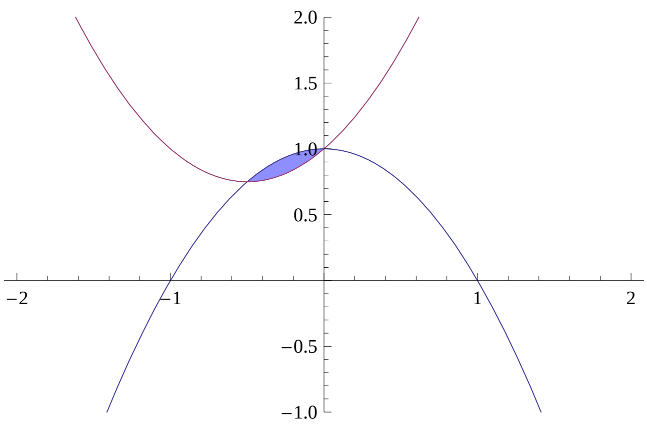
$$\int x^7 \ln(x)\, dx.$$

Rešitev: Integral računamo per partes pri $u = \ln x$ in $dv = x^7\, dx$, torej $du = \frac{1}{x}\, dx$ in $v = \frac{x^8}{8}$. Dobimo

$$\begin{aligned} \int x^7 \ln x\, dx &= \frac{x^8}{8} \ln x - \frac{1}{8} \int x^7\, dx \\ &= \frac{x^8}{8} \ln x - \frac{1}{64} x^8 + C. \end{aligned}$$

5b. (10) Določite ploščino lika, omejenega s krivuljama $y = x^2 + x + 1$ in $y = -x^2 + 1$.

Rešitev:



$$S = \int_{-1/2}^{0} \big((-x^2 + 1) - (x^2 + x + 1)\big)\, dx = -2\,\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-1/2}^{0} = \frac{1}{24}.$$