

Izpit iz Tehniške matematike 2

Fakulteta za strojništvo

11. junij 2010

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	Točke
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Z uvedbo nove spremenljivke $t = e^x$ izračunajte nedoločeni integral

$$\int \frac{1}{e^x + e^{2x}} dx.$$

Rešitev: Z uvedbo nove spremenljivke $t = e^x$ in $dt = e^x dx = t dx$ dobimo

$$\int \frac{1}{e^x + e^{2x}} dx = \int \frac{1}{t + t^2} \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t^2(1+t)} dt.$$

Nadaljujemo z razcepom na parcialne ulomke. Iz nastavka

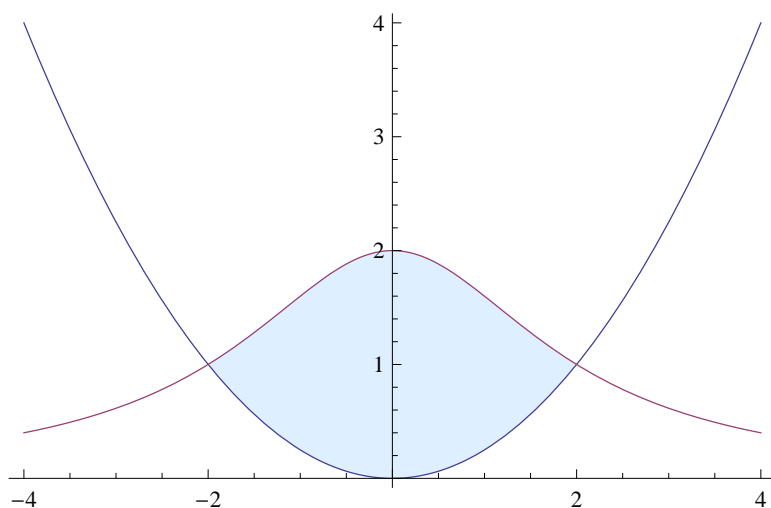
$$\frac{1}{t^2(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{1+t}$$

dobimo $A = -1$, $B = 1$ in $C = 1$, zato

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t^2(1+t)} dt &= - \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{1}{t^2} dt + \int \frac{1}{1+t} dt \\ &= - \ln |t| - \frac{1}{t} + \ln |1+t| + C \\ &= -x - e^{-x} + \ln(1 + e^x) + C. \end{aligned}$$

2. (20) Izračunajte ploščino lika omejenega s krivuljama

$$y = \frac{1}{4}x^2 \quad \text{in} \quad y = \frac{8}{4+x^2}.$$



Slika 1:

Rešitev: Presečišči krivulj sta v $x = -2$ in $x = 2$, torej bo iskana ploščina enaka

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^2 \left(\frac{8}{4+x^2} - \frac{x^2}{4} \right) dx \\ &= 2 \left(8 \cdot \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^3}{12} \right) \Bigg|_0^2 \\ &= 2\left(\pi - \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

3. (20) Poiščite splošno rešitev linearne diferencialne enačbe prvega reda

$$y' + y = 2x + 3$$

in določite tisto rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju $y(0) = 5$.

Rešitev: Najprej rešimo ustrezno homogeno enačbo $y' + y = 0$. Ločimo spremenljivki in dobimo

$$y = C e^{-x}.$$

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom $y = C(x)e^{-x}$. Tako dobimo enačbo

$$C'(x) = (2x + 3)e^x,$$

oziroma (enkrat per partes: $u = 2x + 1$, $dv = e^x dx$)

$$C(x) = (2x + 3)e^x - 2e^x = (2x + 1)e^x.$$

Splošna rešitev naše diferencialne enačbe je torej

$$y(x) = C e^{-x} + 2x + 1.$$

Z vstavljanjem začetnega pogoja dobimo $C = 4$, torej je rešitev enaka

$$y(x) = 4e^{-x} + 2x + 1.$$

4. (20) Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Rešite matrično enačbo

$$AX - B = 2X.$$

Rešitev: Najprej iz dane matrične enačbe izrazimo X :

$$(A - 2I)X = B$$

$$X = (A - 2I)^{-1}B.$$

Ker pa je

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A - 2I)^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

sledi

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

5. (20) Določite realno število a tako, da bo sistem enačb rešljiv in ga v tem primeru tudi rešite.

$$\begin{aligned}x - 2y + 3z &= 1 \\2x - 3y + 4z &= 2 \\4x - 7y + 10z &= a\end{aligned}$$

Rešitev: Uporabimo Gaussov postopek

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & -7 & 10 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -4+a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{bmatrix}.$$

Sistem bo rešljiv le v primeru, ko bo $a = 4$. Rešitev:

$$x = 1 + z, \quad y = 2z, \quad z \in \mathbb{R}.$$