Izpit iz Tehniške matematike 2

Fakulteta za strojništvo

28. junij 2010

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	**Točke**
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
Skupaj	

1. (20) Z uvedbo nove spremenljivke izračunajte določeni integral

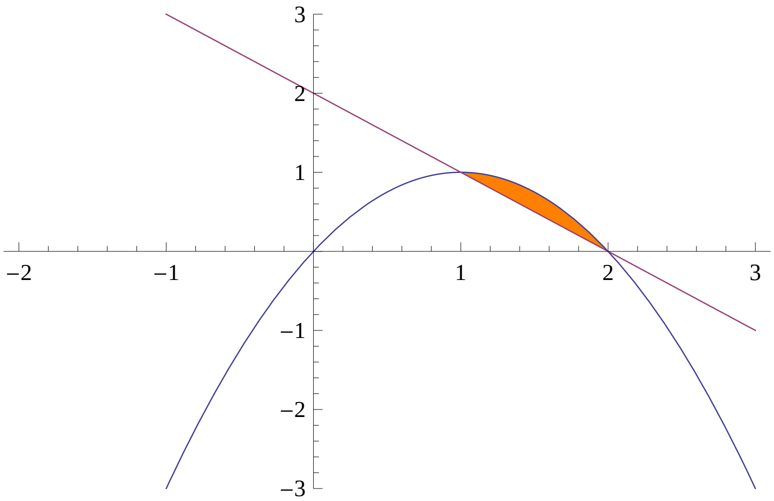
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(3+2\sin x)^3}\, dx\,.$$

Rešitev: Z uvedbo nove spremenljivke $t = 3 + 2\sin x$ *in* $dt = 2\cos x\, dx$ *dobimo*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(3+2\sin x)^3}\, dx &= \frac{1}{2}\int_3^5 \frac{1}{t^3}\, dt \\ &= -\frac{1}{4}\frac{1}{t^2}\bigg|_3^5 = \frac{4}{225}.\end{aligned}$$

2. (20) Izračunajte ploščino lika omejenega s krivuljama

$$y = 2x - x^2 \quad \text{in} \quad x + y = 2.$$



Rešitev:

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \big(2x - x^2 - (2-x)\big)\; dx \\ &= \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)\, dx \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_1^2 \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3. (20) Poiščite splošno rešitev linearne diferencialne enačbe prvega reda

$$y' + \frac{2}{x}\,y = \ln x + \frac{1}{x}$$

in določite tisto rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju $y(1) = \frac{1}{2}$.

Rešitev: Najprej rešimo ustrezno homogeno enačbo $y' + \frac{2}{x}\,y = 0$. *Ločimo spremenljivki in dobimo*

$$y = \frac{C}{x^2}.$$

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom $y = \frac{C(x)}{x^2}$. *Tako dobimo enačbo*

$$C'(x) = x^2 \ln x + x,$$

oziroma (enkrat per partes: $u = \ln x,\ dv = x^2\,dx$*)*

$$C(x) = \frac{1}{3}\,x^3 \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2}.$$

Splošna rešitev naše diferencialne enačbe je torej

$$y(x) = \frac{C}{x^2} + \frac{1}{3}\,x \ln x - \frac{x}{9} + \frac{1}{2}.$$

Z vstavljanjem začetnega pogoja dobimo $C = \frac{1}{9}$, *torej je rešitev enaka*

$$y(x) = \frac{1}{9x^2} + \frac{1}{3}\,x \ln x - \frac{x}{9} + \frac{1}{2}.$$

4. (20) Določite realno število λ tako, da bo sistem enačb rešljiv in ga v tem primeru tudi rešite.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 4y & - & 5z & = & -1 \\ 8x & + & 7y & - & 2z & = & \lambda \\ 2x & - & y & + & 8z & = & 1 \end{array}$$

Rešitev: Uporabimo Gaussov postopek

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & -1 \\ 8 & 7 & -2 & \lambda \\ 2 & -1 & 8 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & -1 \\ 0 & -11 & 34 & 8+3\lambda \\ 0 & 11 & -34 & -4+\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 & -1 \\ 0 & -11 & 34 & 8+3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 4+4\lambda \end{bmatrix}.$$

Sistem bo rešljiv le v primeru, ko bo $\lambda = -1$. *Rešitev:*

$$x = \frac{3-27z}{11}, \ y = \frac{-5+34z}{11}, \ z \in \mathbb{R}.$$

5. (20) Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte matriko $B = A^2 - 3I$ in poiščite lastni vrednosti ter lastna vektorja matrike B.

Rešitev:

$$B = A^2 - 3I = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ker je $\det(B - \lambda I) = (\lambda + 2)(\lambda - 13)$, *sta lastni vrednosti te matrike* $\lambda_1 = -2$ *in* $\lambda_2 = 13$.
(1) Pri $\lambda = -2$ *iz matrične enačbe*

$$(B - \lambda I)\overrightarrow{x} = 0 \text{ oziroma } \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo lastni vektor npr. $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(2) Pri $\lambda = 13$ *iz matrične enačbe*

$$(B - \lambda I)\overrightarrow{x} = 0 \text{ oziroma } \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dobimo lastni vektor npr. $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.