Izpit iz Tehniške matematike

Fakulteta za strojništvo

5. september 2008

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
Skupaj			

1. Dani so vektorji $\overrightarrow{a} = (t, -1, 4)$, $\overrightarrow{b} = (2, 0, -2)$ in $\overrightarrow{c} = (-2, t, 1)$.
1a. (10) Za katero vrednost parametra t sta vektorja $2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}$ pravokotna?

Rešitev:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} &= (2t + 2, -2, 6) \\ \overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b} &= (-6, t, 5). \end{aligned}$$

Zaradi pravokotnosti sledi

$$(2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}) = -6(2t + 2) - 2t + 30 = 0,$$

torej $t = \frac{9}{7}$.

1b. (10) Za katere vrednosti parametra t je prostornina paralelepipeda, določenega z vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$ enaka 8?

Rešitev: Poiskati moramo t*, pri katerem je*

$$|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})| = 8.$$

Ker je

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} t & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & t & 1 \end{vmatrix} = 2t^2 - 2 + 8t,$$

dobimo dve enačbi: $2t^2 + 8t - 2 = 8$ *in* $2t^2 + 8t - 2 = -8$*. Prva ima rešitvi* $t = -5$ *in* $t = 1$*, druga pa* $t = -3$ *in* $t = -1$.

2a. (10) Za katere vrednosti parametra λ je sistem

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ 2x + y - \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

protisloven?

Rešitev: Uporabimo Gaussov postopek

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -\lambda & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda - 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2\lambda + 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sistem je protisloven, če je $2\lambda + 8 = 0$, torej $\lambda = -4$.

2b. (10) Rešite sistem v primeru $\lambda = 1$.

Rešitev: Iz zgornjega postopka pri $\lambda = 1$ dobimo sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \end{bmatrix},$$

ki ima rešitev $x = 1/2$, $y = -1/2$ in $z = 1/2$.

3a. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^6 + 4x + 1)}.$$

Rešitev: Računamo z uporabo l'Hopitalovega pravila.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^6 + 4x + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x-1}{x^2-x+1}}{\frac{6x^5+4}{x^6+4x+1}} = -\frac{1}{4}.$$

3b. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}.$$

Rešitev: Z dvakratno uporabo l'Hopitalovega pravila dobimo

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-2(\frac{\pi}{2} - x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2} = \frac{1}{2}.$$

4a. (15) Za funkcijo

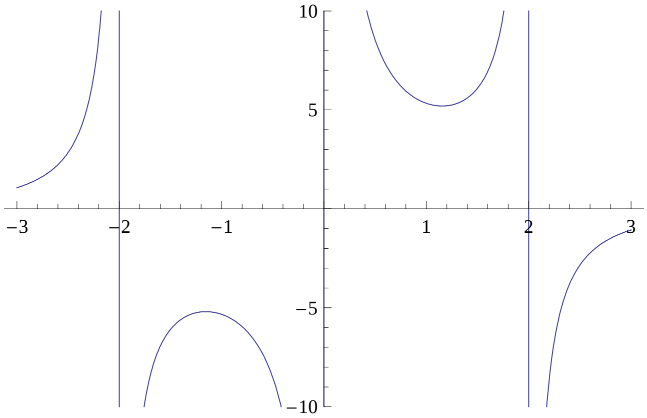
$$f(x) = \frac{16}{x(4-x^2)}$$

določite definicijsko območje, pole, asimptoto, ekstreme in njihov tip ter intervale naraščanja in padanja.

Rešitev: Funkcija je definirana za $x \neq 0, -2, 2$. *Ničel nima, poli pa so torej v točkah* $x = 0, x = -2, x = 2$. *Asimptota je abscisna os, odvod je enak* $f'(x) = \frac{-16(4-3x^2)}{x^2(4-x^2)^2}$, *zato sta stacionarni točki* $T_1(2/\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ *in* $T_2(-2/\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$. *Funkcija narašča za* $x \in (-\infty, -2/\sqrt{3}) \cup (2/\sqrt{3}, \infty)$ *in pada povsod drugje. V* T_1 *je torej lokalni minimum, v* T_2 *pa lokalni maksimum.*

3b. (5) Skicirajte graf funkcije.

Rešitev:



Slika 1: Graf funkcije $f(x) = \frac{16}{x(4-x^2)}$.

5a. (10) Izračunajte nedoločeni integral

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x}\,dx.$$

Rešitev:

$$\int \frac{e^{3x}+1}{e^x}\,dx = \int (e^{2x}+e^{-x})\,dx = \frac{1}{2}\,e^{2x} - e^{-x} + C.$$

5b. (10) Izračunajte ploščino lika omejenega s krivuljo $y = \frac{1}{x}+1$, tangento na to krivuljo v točki $T(2, \frac{3}{2})$ in premico $x = 1$.

Rešitev: Enačba tangente je

$$y = -\frac{1}{4}x + 2,$$

zato je iskana ploščina enaka

$$S = \int_1^2 \left((\frac{1}{x}+1) - (-\frac{x}{4}+2) \right)\,dx = \left(\ln x + \frac{x^2}{8} - x \right)\Bigg|_1^2 = \ln 2 - \frac{5}{8}.$$