# Izpit iz Tehniške matematike

Fakulteta za strojništvo

11. september 2009

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 5, vsaka je vredna 20 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

| **Naloga** | **Točke** |
|---|---|
| **1.** | |
| **2.** | |
| **3.** | |
| **4.** | |
| **5.** | |
| **Skupaj** | |

**1.** (20) Poiščite enačbo ravnine, ki vsebuje točko $A(2, 1, 1)$ in premico

$$x - 1 = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{2}.$$

*Rešitev: Najprej poiščemo dva vektorja, ki ležita na iskani ravnini. To sta smerni vektor premice* $\overrightarrow{s} = (1, 3, 2)$ *in vektor* $\overrightarrow{r}$ *med točko na premici npr.* $B(1, -2, 3)$ *in točko* $A(2, 1, 1)$*, torej* $\overrightarrow{r} = (1, 3, -2)$.

*Normalo ravnine dobimo z vektorskim produktom*

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{s} \times \overrightarrow{r} = (-12, 4, 0).$$

*Iskana ravnina ima torej enačbo*

$$-12x + 4y + d = 0.$$

*Z vstavljanjem točke* $A$ *dobimo* $d = 20$*, torej*

$$-12x + 4y + 20 = 0.$$

**2.** (20) Dani sta matriki $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Rešite matrično enačbo $AX - B = 2BX$.

*Rešitev: Najprej iz dane matrične enačbe izrazimo* $X$*:*

$$X = (A - 2B)^{-1}B.$$

*Ker je* $A - 2B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ *in* $(A - 2B)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, *sledi*

$$X = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

**3.** (20) Zapišite enačbo tangente in normale na krivuljo

$$y = arctg\left(\frac{x-1}{4}\right)$$

v točki $T(x_0, \pi/4)$.

*Rešitev: Ker je* $x_0 = 5$ *in*

$$y'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{4}\right)^2} \cdot \frac{1}{4},$$

*je smerni koeficient tangente enak*

$$k = y'(5) = \frac{1}{8}.$$

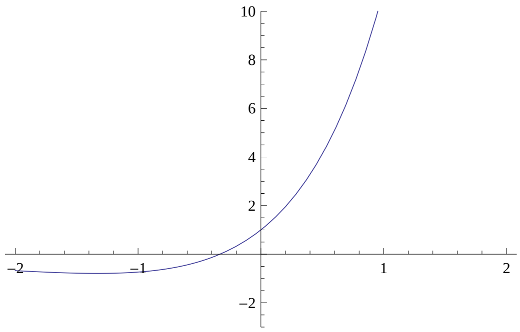
*Iskana tangenta ima torej enačbo*

$$y = \frac{1}{8}(x-5) + \frac{\pi}{4},$$

*normala pa*

$$y = -8(x-5) + \frac{\pi}{4}.$$

**4.** (20) Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo krivulja $y = (3x+1)e^x$, abscisna in ordinatna os in premica $x = 2$.




Slika 1: Graf funkcije $f(x) = (3x+1)e^x$.

*Rešitev: Očitno je*

$$P = \int_0^2 (3x+1)e^x\,dx.$$

*Računamo per partes pri* $u = 3x+1$ *in* $dv = e^x$, *zato* $du = 3dx$ *in* $v = e^x$.

$$\begin{aligned} P &= (3x+1)e^x\Big|_0^2 - 3\int_0^2 e^x\,dx \\ &= 7e^2 - 1 - 3e^x\Big|_0^2 \\ &= 4e^2 + 2. \end{aligned}$$

**5.** (20) Poiščite splošno rešitev linearne diferencialne enačbe prvega reda

$$y' - \sin(x)y = 2\sin(x)$$

in določite tisto rešitev, ki zadošča začetnemu pogoju $y(\pi/2) = 1$.

*Rešitev: Najprej rešimo ustrezno homogeno enačbo $y' = \sin x\, y$. Ločimo spremenljivki in dobimo*

$$y = Ce^{-\cos x}.$$

*Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom $y = C(x)\, e^{-\cos x}$. Tako dobimo enačbo*

$$C'(x) = 2\sin x e^{\cos x}$$

*in*

$$C(x) = -2e^{\cos x}.$$

*Splošna rešitev naše diferencialne enačbe je torej*

$$y(x) = Ce^{-\cos x} - 2.$$

*Z vstavljanjem začetnega pogoja dobimo $C = 3$, torej je rešitev enaka*

$$y(x) = 3e^{-\cos x} - 2.$$