

1. kolokvij iz Tehniške matematike 2

Fakulteta za strojništvo

29. marec 2010

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 4, vsaka je vredna 25 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj	

1. (25) Izračunajte nedoločeni integral

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

Rešitev: Izraz pod integralom najprej delimo

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 6 : x^2 - 5x + 6 = x - 1 + \frac{2x}{x^2 - 5x + 6},$$

zato lahko zapišemo

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \left(x - 1 + \frac{2x}{x^2 - 5x + 6} \right) dx.$$

Zadnji integral izračunamo z razcepom na parcialne ulomke

$$\frac{2x}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}.$$

Dobimo

$$A = 6, \quad B = -4.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{x^2 - 5x + 6} dx &= \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{6}{x-3} dx - \int \frac{4}{x-2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x + 6 \ln |x-3| - 4 \ln |x-2| + C. \end{aligned}$$

2. (25) Z integracijo per-partes izračunajte določeni integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos(2x) dx.$$

Rešitev: Integral računamo per partes pri $u = x^2$ in $dv = \cos 2x dx$, torej $du = 2x dx$ in $v = \frac{1}{2} \sin 2x$. Dobimo

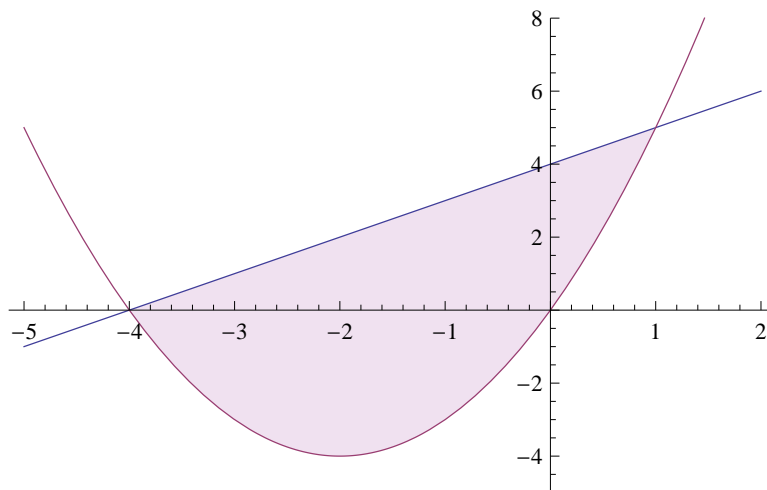
$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos(2x) dx &= \left(\frac{1}{2} x^2 \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx \\ &= \frac{\pi^2}{32} - \left(-\frac{1}{2} x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx \right) \\ &= \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Še enkrat smo uporabili metodo per partes pri $u = x$, $dv = \sin 2x dx$ in $du = dx$, $v = -\frac{1}{2} \cos 2x$.

3. (25) Izračunajte ploščino lika, omejenega s krivuljama

$$y = x^2 + 4x \quad \text{in} \quad y = x + 4.$$

Rešitev:



$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^1 ((x + 4) - (x^2 + 4x)) \, dx \\ &= \int_{-4}^1 (-x^2 - 3x + 4) \, dx \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x \right) \Big|_{-4}^1 \\ &= \frac{125}{6}. \end{aligned}$$

4. (25) Izračunajte prostornino rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem grafa funkcije

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

okrog x osi na intervalu $[0, 1]$.

Rešitev: Računamo z uvedbo nove spremenljivke:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 \frac{x^2}{(x+1)^4} dx \quad t = x+1, dt = dx \\ &= \pi \int_1^2 \frac{(t-1)^2}{t^4} dt \\ &= \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t^4} \right) dt \\ &= \pi \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{3t^3} \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{\pi}{24}. \end{aligned}$$