2. kolokvij iz Tehniške matematike 2

Fakulteta za strojništvo

24. maj 2010

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 4, vsaka je vredna 25 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj	

1. (25) Za funkcijo

$$f(x,y) = x\,\ln y - \sqrt{xy}$$

določite

- definicijsko območje,
- vektor grad$f(4,1)$,
- enačbo tangentne ravnine na graf funkcije v točki $T(4,1,f(4,1))$.

Rešitev: Funkcija je definirana povsod tam, kjer je

$$y > 0 \quad \text{in} \quad xy \geq 0,$$

torej $y > 0$ in $x \geq 0$ (prvi kvadrant koordinatne ravnine, brez x osi).

Računamo parcialne odvode:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \ln y - \frac{y}{2\sqrt{xy}} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x}{y} - \frac{x}{2\sqrt{xy}} \\
\mathrm{grad} f(4,1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(4,1), \frac{\partial f}{\partial y}(4,1)\right) = (-\frac{1}{4}, 3)
\end{aligned}$$

Kot vemo, je normala tangentne ravnine v točki $T(x,y,z)$ enaka

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), -1\right),$$

zato v našem primeru, v točki $T(4,1,-2)$ dobimo

$$\vec{n} = \left(-\frac{1}{4}, 3, -1\right),$$

in tangentna ravnina ima enačbo

$$-\frac{1}{4}x + 3y - z - 4 = 0.$$

2. (25) Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe

$$\sqrt{1-x^2}\; y' + x\, y^2 = 0, \qquad x \in (-1,1).$$

Rešitev: Z ločitvijo spremenljivk in integriranjem dobimo

$$\begin{aligned} -\frac{y'}{y^2} &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{1}{y} &= -\sqrt{1-x^2} + C \\ y &= \frac{1}{C - \sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

3. (25) Rešite linearno diferencialno enačbo

$$y' + \frac{2}{x}\,y = \frac{3}{x^4}.$$

in poiščite rešitev, ki ustreza začetnemu pogoju $y(1) = 3$.

Rešitev: Najprej rešimo ustrezno homogeno enačbo $y' + \frac{2}{x}\,y = 0$. Ločimo spremenljivki in dobimo

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x}$$

$$\ln y = -2\ln x + \ln C$$

$$y_H = \frac{C}{x^2}.$$

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom $y_P = \frac{C(x)}{x^2}$. Tako dobimo enačbo

$$C'(x) = \frac{3}{x^2},$$

oziroma

$$C(x) = -\frac{3}{x}$$

in zato

$$y_P = -\frac{3}{x^3}.$$

Splošna rešitev naše diferencialne enačbe je torej

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = \frac{C}{x^2} - \frac{3}{x^3}.$$

Z vstavljanjem začetnega pogoja dobimo $C = 6$, torej je rešitev enačbe

$$y(x) = \frac{6}{x^2} - \frac{3}{x^3}.$$

4. (25) Rešite matrično enačbo

$$AX + 3X = I - B,$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Najprej iz dane matrične enačbe izrazimo X:

$$(A + 3I)X = I - B$$

$$X = (A + 3I)^{-1}(I - B).$$

Ker je $A + 3I = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ in $(A + 3I)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, sledi

$$X = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$