3. kolokvij iz Tehniške matematike

Fakulteta za strojništvo

30. marec 2009

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 4, vsaka je vredna 25 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj	

1. (25) Določite takšni števili a in b, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} - 1, & x \leq -1 \\ \log_4(x+a), & -1 < x \leq 2 \\ bx - 2, & x > 2 \end{cases}$$

zvezna. Dobljeni funkciji določite še inverzno funkcijo.

Rešitev: V točki $x = -1$ *je*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1-} f(x) &= \lim_{x \to -1-} 2^{x+1} - 1 = 0, \\ \lim_{x \to -1+} f(x) &= \lim_{x \to -1+} \log_4(x+a) = \log_4(-1+a), \\ f(-1) &= 0, \end{aligned}$$

zato je $\log_4(-1+a) = 0$, *torej* $a = 2$. *Podobno v točki* $x = 2$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2-} f(x) &= \lim_{x \to 2-} \log_4(x+2) = \log_4 4 = 1, \\ \lim_{x \to 2+} f(x) &= \lim_{x \to 2+} bx - 2 = 2b - 2, \\ f(2) &= \log_4 4 = 1. \end{aligned}$$

Sledi $2b - 2 = 1$ *in zato* $b = \frac{3}{2}$.

Ker je tako definirana funkcija naraščajoča, ima inverzno funkcijo, definirano na zalogi vrednosti $\mathcal{Z}_f = (-1, \infty)$. *Inverz je*

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \log_2(x+1) - 1, & -1 < x \leq 0 \\ 4^x - 2, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{3}(x+2), & x > 1 \end{cases}$$

2. (25) Izračunajte naslednji limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x+4}-2} =$$

Rešitev:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x+4}-2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x+4}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} (\sqrt{x+4}+2) = 4
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\,\ln(x)}{x} =$$

Rešitev: Izraz najprej poenostavimo, nato pa uporabimo l'Hopitalovo pravilo.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\,\ln(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.
\end{aligned}$$

3. (25) Zapišite enačbo tangente na graf funkcije

$$g(x) = e^{x^2-1}$$

v točki $T(1, y)$.

Rešitev: Ker je

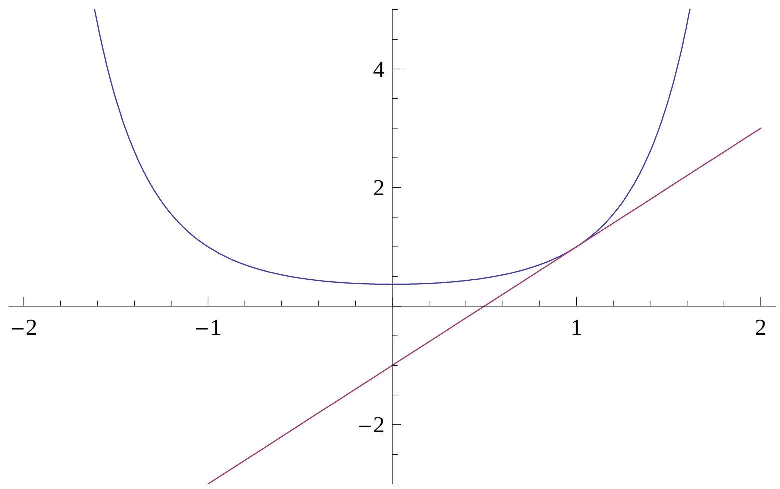
$$g'(x) = e^{x^2-1} \cdot 2x,$$

bo smerni koeficient tangente v $x = 1$ *enak*

$$k = g'(1) = 2.$$

Enačba iskane tangente v točki $T(1, 1)$ *je torej*

$$y = 2x - 1.$$



Slika 1: Graf funkcije $f(x) = e^{x^2-1}$ in njene tangente v $T(1, 1)$

4. (25) Dana je funkcija

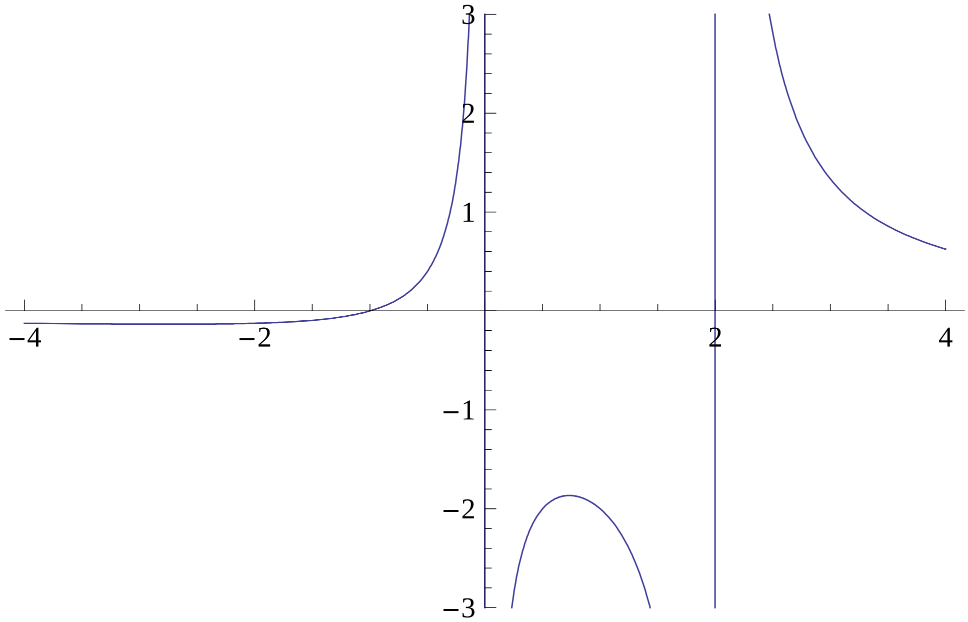
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 2x}.$$

Določite njeno definicijsko območje, ničle, pole, asimptoto, stacionarne točke, lokalne maksimume, lokalne minimume, intervale naraščanja in padanja ter natančno narišite njen graf.

Rešitev: Funkcija je definirana za $x \neq 0, 2$*. Ničla je v točki* $x = -1$*, pola pa sta v točkah* $x = 0$ *in* $x = 2$*. Asimptota je abscisna os, odvod je enak*

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2},$$

zato sta stacionarni točki v $x_1 = -1 - \sqrt{3}$ *in* $x_2 = -1 + \sqrt{3}$*. Funkcija narašča za* $x \in (-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$ *in pada povsod drugje. V* x_1 *je torej lokalni minimum, v* x_2 *pa lokalni maksimum.*



Slika 2: Graf funkcije $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$.