4. kolokvij iz Tehniške matematike

Fakulteta za strojništvo

25. maj 2009

Ime in priimek:______________________ Vpisna številka:________________

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Nalog je 4, vsaka je vredna 25 točk. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Na razpolago imate 90 minut.

Naloga	
1.	
2.	
3.	
4.	
Skupaj	

1. (25) Izračunajte nedoločeni integral

$$\int \frac{x+1}{x^2(x+2)}\,dx.$$

Rešitev: Izraz pod integralom razcepimo na parcialne ulomke

$$\frac{x+1}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}.$$

Dobimo

$$A = \frac{1}{4}, \qquad B = \frac{1}{2}, \qquad C = -\frac{1}{4}.$$

Sledi

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2(x+2)}\,dx &= \int \frac{1}{4x}\,dx + \int \frac{1}{2x^2}\,dx - \int \frac{1}{4(x+2)}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{2x} - \frac{1}{4}\ln|x+2| + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| - \frac{1}{2x} + C.
\end{aligned}$$

2. (25) Z integracijo per-partes izračunajte integral

$$\int x^2 \ln(x+3)\, dx.$$

Nato izračunajte še določeni integral

$$\int_{-2}^{0} x^2 \ln(x+3)\, dx.$$

Rešitev: Integral računamo per partes pri $u = \ln(x+3)$ *in* $dv = x^2\, dx$*, torej* $du = \frac{1}{x+3}\, dx$ *in* $v = \frac{x^3}{3}$*. Dobimo*

$$\begin{aligned}
\int x^2 \ln(x+3)\, dx &= \frac{x^3}{3}\ln(x+3) - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x+3}\, dx \\
&= \frac{x^3}{3}\ln(x+3) - \frac{1}{3}\int (x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{x+3})\, dx \\
&= \frac{x^3}{3}\ln(x+3) - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 9\ln|x+3| + C.
\end{aligned}$$

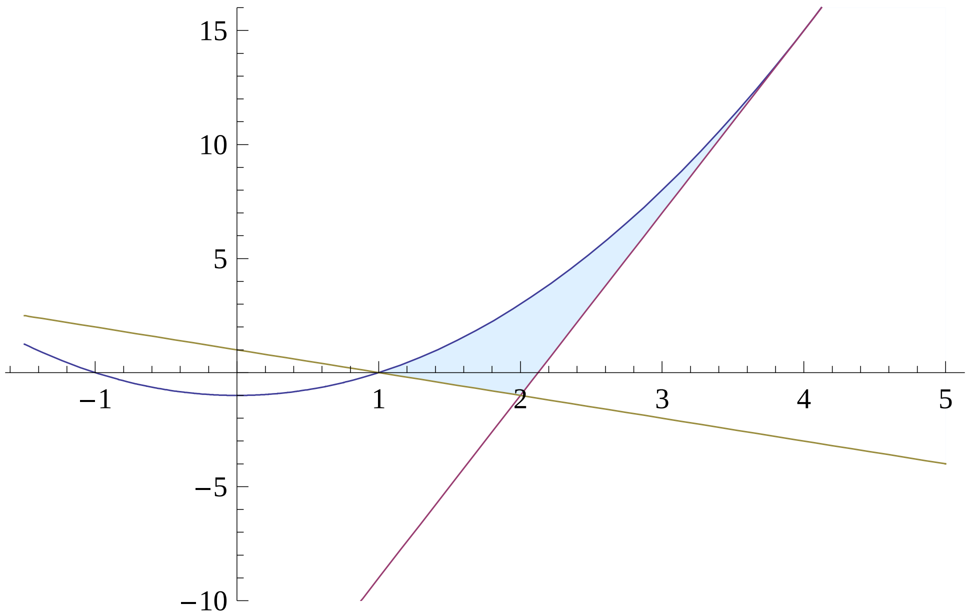
Določeni integral dobimo z vstavljanjem mej.

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{0} x^2 \ln(x+3)\, dx &= \frac{x^3}{3}\ln(x+3) - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 9\ln|x+3| \Bigg|_{-2}^{0} \\
&= 9\ln 3 - \frac{80}{9}.
\end{aligned}$$

3. (25) Izračunajte ploščino lika, ki je omejen z grafi funkcij

$$f(x) = x^2 - 1, \qquad g(x) = 8x - 17 \quad \text{in} \quad h(x) = 1 - x.$$

Rešitev:



$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 (f(x) - h(x))\,dx + \int_2^4 (f(x) - g(x))\,dx \\ &= \int_1^2 (x^2 + x - 2)\,dx + \int_2^4 (x^2 - 8x + 16)\,dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x\right)\Bigg|_2^4 \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

4. (25) Za funkcijo

$$f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}+\ln\left(\frac{xy}{2}\right)$$

določite

- definicijsko območje,
- vektor $\mathrm{grad} f(x,y)$,
- enačbo tangentne ravnine na graf funkcije v točki $T(2,1,f(2,1))$.

Rešitev: Funcija je definirana povsod tam, kjer je

$$9-x^2-y^2\geq 0 \quad \text{in} \quad \frac{xy}{2}>0,$$

$$x^2+y^2\leq 9 \quad \text{in} \quad xy>0.$$

Definicijsko območje funkcije torej sestavljata četrtinki kroga s polmerom 3 *v prvem in tretjem kvadrantu. Robovi na koordinatnih oseh niso v definicijskem območju.*

Računamo parcialne odvode:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}+\frac{1}{x}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}+\frac{1}{y}\\
\mathrm{grad} f(x,y) &= (\frac{-x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}+\frac{1}{x},\frac{-y}{\sqrt{9-x^2-y^2}}+\frac{1}{y})
\end{aligned}$$

Kot vemo, je normala tangentne ravnine v točki $T(x,y,z)$ enaka

$$\vec{n}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y),-1\right),$$

zato v našem primeru, v točki $T(2,1,2)$ dobimo

$$\vec{n}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right),$$

in tangentna ravnina ima enačbo

$$-x+y-2z+5=0.$$