

Naloge za 3. kolokvij

Fakulteta za strojništvo, marec 2006

Integracija funkcij:

1. Izračunajte integrale

$$\int_0^1 t \operatorname{arctg} t dt \quad [\mathbf{R}: \frac{1}{4}(\pi - 2)],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 3x dx \quad [\mathbf{R}: -\frac{1}{2}],$$

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx \quad [\mathbf{R}: 2 - \frac{5}{e}],$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4 + 5x^3}} dx \quad [\mathbf{R}: \frac{2}{15}],$$

$$\int_0^x (\sin 2t - \cos 2t) e^{3t} dt \quad [\mathbf{R}: \frac{1}{13}(5 + e^{3x}(\sin 2x - 5 \cos 2x))],$$

$$\int_0^x (3 - t^3) \cos 2t dt$$

$[\mathbf{R}: \frac{1}{8}(-3 + (3 - 6x^2) \cos 2x + (12 + 6x - 4x^3) \sin 2x)]$

2. Z uvedbo nove spremenljivke $t = x^4$ izračunajte integral

$$\int_1^2 \frac{1}{x(1 + x^4)} dx$$

$[\mathbf{R}: \frac{1}{4} \ln \frac{32}{17}]$

3. Izračunajte integral

$$\int_{-1}^1 \frac{6x + 4}{x^2 - 4} dx$$

$[\mathbf{R}: -\ln 9]$

4. Z uvedbo nove spremenljivke $u = \pi - t$ izračunajte integral

$$\int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt$$

$[\mathbf{R}: \frac{\pi^2}{4}]$

5. Izračunajte integral

$$\int_0^a \frac{\cos x}{\cos(a-x)} dx,$$

kjer je $0 < a < \pi/2$.

[R: $a \cos a - \sin a \ln(\cos a)$]

6. Per partes izračunajte integral

$$\int_0^x \frac{te^t}{(1+t)^2} dt, \quad x > -1$$

[R: $\frac{e^x}{1+x} - 1$]

7. Izračunajte posplošeni integral

$$\int_{-2}^0 t^2 \ln(t+2) dt$$

[R: $\frac{4}{9}(\ln 64 - 11)$]

8. Izračunajte posplošeni integral

$$\int_0^\infty \frac{t^3}{t^8 + 1} dt$$

[R: $\frac{\pi}{8}$]

9. Za funkcijo

$$f(x) = \int_0^x (e^{-t} + t)^2 dt$$

izračunajte $f(0)$, $f'(x)$ in nato še

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3}$$

[R: $f(0) = 0$, $f'(x) = (e^{-x} + x)^2$, $\lim = 0$]

10. Preverite formulo

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-t) dt$$

in jo uporabite za izračun integrala

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan x) dx$$

[R: 0]

11. Z novo spremenljivko $t = \sin u$ izračunajte posplošeni integral

$$\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

[R: $\frac{2}{3}$]

12. Z novo spremenljivko $t = x^2$ in integracijo per partes izračunajte posplošeni integral

$$\int_1^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} dx$$

[R: $\frac{1}{16}(\ln 4 - 1)$]

13. Izračunajte posplošeni integral

$$\int_0^\infty |3-x|e^{-x} dx$$

[R: $\frac{2(1+e^3)}{e^3}$]

14. Per partes izračunajte

$$\int_0^x \frac{t \operatorname{arctg} t}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

[R: $\sqrt{1+x^2} \arctan x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$]

15. Izračunajte posplošeni integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{2t^2 + 3t + 1} dt$$

[R: $\ln 2$]

16. Izračunajte ploščino preseka elips z enačbama

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

kjer je $a > b > 0$.

[R: $4ab \arctan(\frac{b}{a})$]

17. Izračunajte ploščino lika omejenega s krivuljama

$$y = \frac{1}{4a^2}x^2, \quad y = \frac{8a^2}{x^2 + 4a^2},$$

kjer je $a > 0$.

[R: $2a(\pi - \frac{2}{3})$]

18. Izračunajte dolžino grafa funkcije

$$f(x) = \sqrt{x-x^2} + \arcsin \sqrt{x}$$

[R: 2]

19. Izračunajte volumen vrtenine, ki nastane pri vrtenju krožnice z enačbo

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2, \quad 0 < r < b,$$

okoli osi x .

$$[\mathbf{R}: 2\pi^2 br^2]$$

20. Izračunajte volumen soda, če ima plašč obliko parabole in je r polmer osnovne ploskve, R največji polmer in h višina soda.

$$[\mathbf{R}: \frac{\pi h}{15} (3r^2 + 4rR + 8R^2)]$$

21. Izračunajte volumen vrtenine, ki jo dobimo, če lik omejen s krivuljami

$$y = \ln x, \quad y = \sin(x - 1), \quad x = 1, \quad x = 2$$

zavrtimo okoli osi x .

$$[\mathbf{R}: \pi(-\frac{3}{2} - 2 \ln^2 2 + 4 \ln 2 - \frac{1}{4} \sin 2)]$$

22. Izračunajte površino rotacijskega telesa, ki nastane pri vrtenju krivulje

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0$$

okoli osi x nad intervalom $[0, a]$.

$$[\mathbf{R}: \frac{1}{4} \pi a^3 (2 + \sinh 2)]$$

23. Izračunajte površino rotacijskega telesa, ki nastane pri vrtenju krivulje $y = \sqrt{x}$ okoli osi x nad intervalom $[0, 1]$.

$$[\mathbf{R}: \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1)]$$

24. Izračunajte volumen elipsoida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$[\mathbf{R}: \frac{4}{3} \pi abc]$$

Funkcije več spremenljivk:

25. Določite ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$$

26. Določite ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^2y - \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - y^2 - 3y + 1$$

27. Določite ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^2y - xy^2 + xy + 2$$

28. Določite ekstreme funkcije

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}y + 1$$

29. Poiščite ekstreme funkcije

$$u = xy + 2xz + 2yz, \quad \text{pri pogoju} \quad xyz = 32$$

30. Poiščite ekstreme funkcije

$$u(x, y, z) = 2x + y - 3z \quad \text{pri pogoju} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 14.$$

31. V ravnini (xy) poiščite točko $M(x, y)$ tako, da bo vsota kvadratov razdalj te točke do premic $x = 0$, $y = 0$ in $x - y + 1 = 0$ najmanjša.

Nasvet: Razdalja točke $M(x, y)$ do premice $ax + by + c = 0$ je enaka $|\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}|$.

32. Na elipsi z enačbo $4x^2 + 9y^2 = 36$ poiščite točko, ki je najbližja točki $T(1, 0)$. Izračunajte minimalno razdaljo.

33. Določite robove pravokotne škatle brez pokrova tako, da bo pri danem volumnu V njena površina minimalna.

34. Zapišite število 27 kot produkt treh pozitivnih števil x , y in z tako, da bo vsota $x + y + z$ najmanjša.

35. Izračunajte največjo in najmanjšo vrednost funkcije

$$f(x, y) = x^2y \quad \text{na območju} \quad D = \{(x, y) ; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

36. Izračunajte lokalne ekstreme implicitne funkcije $y = y(x)$, podane z enačbo

$$x^2y - \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} - 9 = 0$$

37. Izračunajte lokalne ekstreme implicitne funkcije $y = y(x)$ dane z enačbo

$$x^2 + y^3 - 2xy = 0$$