Numerična napaka

6. VAJA

6.1 Numerična napaka-kvadratna enačba

Izračunaj kvadratno enačbo $Ax^2 + Bx + C = 0$

Rešitve izračunaj na dva načina:

$A = 1;\quad B = 1, 10, 100, \ldots, 10^7;\quad C = -3.$

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

$$x_{1,2} = \frac{-2C}{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}.$$

Izpeljava:

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

$$x_{1,2} = \frac{\left(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}\right)\left(-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}\right)}{2A\left(-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}\right)} =$$

$$x_{1,2} = \frac{B^2 - B^2 + 4AC}{2A\left(-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}\right)} = \frac{2C}{-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}$$

Naredi preizkus tako, da rešitve vstaviš v kvadratno enačbo. Kaj ugotoviš?

* Primer je vzet iz knjige J. Petrišič, Reševanje enačb, FS

6.1 Numerična napaka-kvadratna enačba

C:\vaje NM IR\numerične\nm\vaja 8\Untitled14.m*

File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help

```
%napaka kvadratne enačbe
clc; clear all; format long
a=1;b=1;c=-3;
disp '        B             x1              x2              r plus            r minus'
for i=1:9
  %rešitev prvi način
  x1=(-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a);
  x2=(-b-sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a);
  %preizkus
  r1=a*x1^2+b*x1+c;
  r2=a*x2^2+b*x2+c;
  fprintf('%11i  %+15.9f  %+15.9e  %+15.9f  %+15.9f \n',b,x1,x2,r1,r2)
  b=b*10;
end
disp ' '
disp '        B             x1              x2              r plus            r minus'
b=1;
for i=1:9
  %rešitev drugi način
  y1=-2*c/(b+sqrt(b*b-4*a*c));
  y2=-2*c/(b-sqrt(b*b-4*a*c));
  %preizkus
  k1=a*y1^2+b*y1+c;
  k2=a*y2^2+b*y2+c;
  fprintf('%11i  %+15.9f  %+15.9e  %+15.9f  %+15.9f \n',b,y1,y2,k1,k2)
  b=10^i;
end
```

script Ln 27 Col 4 OVR

6.1 Numerična napaka-kvadratna enačba

Rezultati

Command Window

File Edit Debug Desktop Window Help

```
         B              x1              x2              r plus          r minus
         1     +1.302775638  -2.302775638e+000     +0.000000000     +0.000000000
        10     +0.291502622  -1.029150262e+001     +0.000000000     +0.000000000
       100     +0.029991005  -1.000299910e+002     +0.000000000     +0.000000000
      1000     +0.002999991  -1.000003000e+003     +0.000000000     +0.000000000
     10000     +0.000300000  -1.000000030e+004     -0.000000004     -0.000000015
    100000     +0.000030000  -1.000000000e+005     +0.000000289     +0.000000000
   1000000     +0.000003000  -1.000000000e+006     +0.000022843     +0.000000000
  10000000     +0.000000300  -1.000000000e+007     -0.001141310     +0.000000000
 100000000     +0.000000030  -1.000000000e+008     -0.019767761     +1.000000000

         B              x1              x2              r plus          r minus
         1     +1.302775638  -2.302775638e+000     +0.000000000     +0.000000000
        10     +0.291502622  -1.029150262e+001     +0.000000000     -0.000000000
       100     +0.029991005  -1.000299910e+002     +0.000000000     -0.000000001
      1000     +0.002999991  -1.000003000e+003     +0.000000000     -0.000009027
     10000     +0.000300000  -1.000000031e+004     +0.000000000     +0.132542491
    100000     +0.000030000  -9.999999040e+004     +0.000000000   -963.038169861
   1000000     +0.000003000  -9.999923856e+005     +0.000000000 -7614380.410278320
  10000000     +0.000000300  -1.000380581e+007     +0.000000000 +38072620860.609375000
 100000000     +0.000000030  -1.006632960e+008     +0.000000000 +6676956158361 3.000000000
>>
```

OVR

6.1 Numerična napaka-kvadratna enačba

Na primeru vidimo, da dobimo pravilne rezultate pri

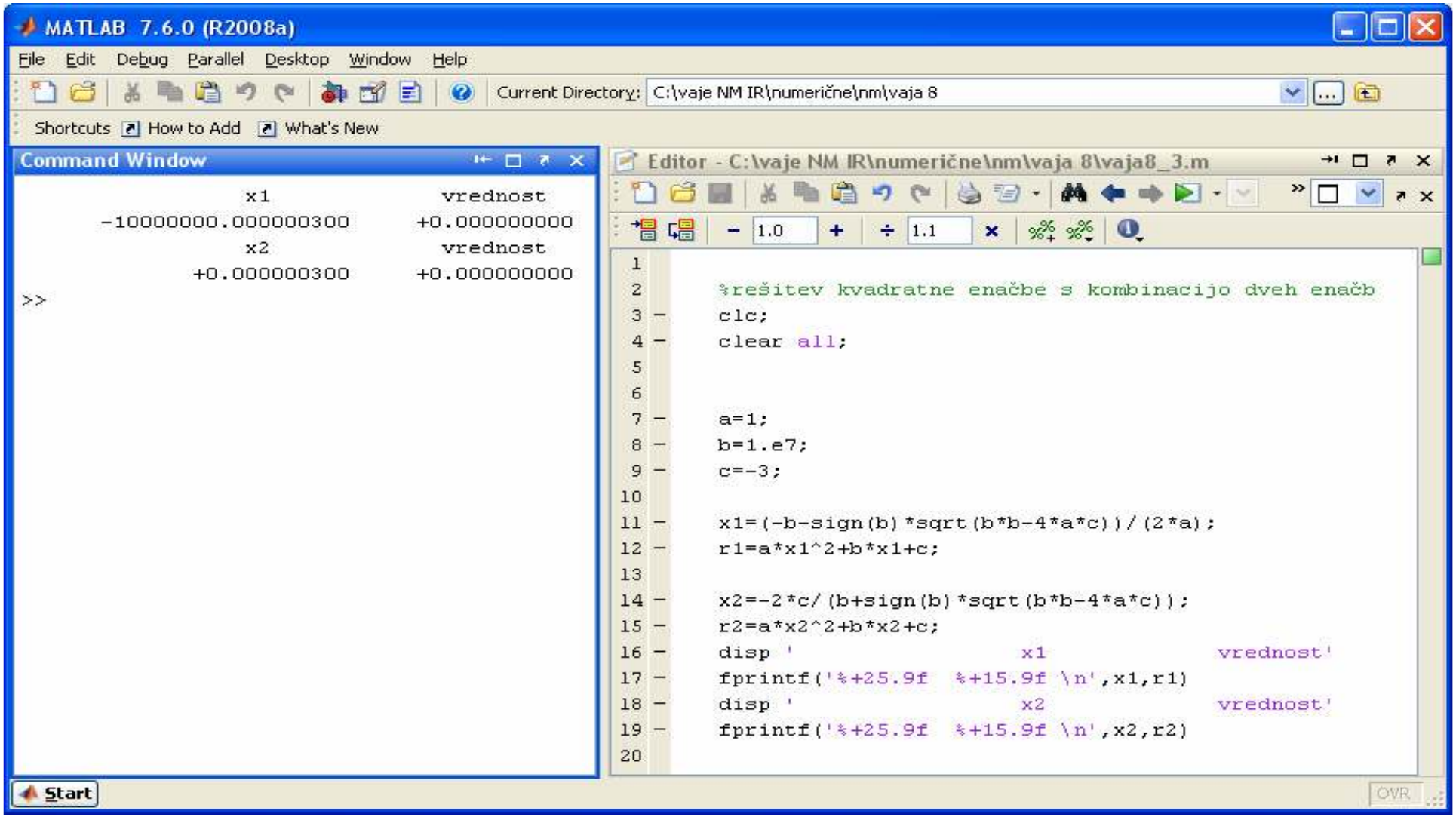
$$x_1 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad \text{in} \quad x_2 = \frac{-2C}{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}.$$

Kako bi združili oba rezultata pri reševanju kvadratne enačbe?

Opomba: funkcija sign() je definirana kot:

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

6.1 Numerična napaka-kvadratna enačba



$$x_1 = \frac{-B - sign(B)\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

$$x_2 = \frac{-2C}{B + sign(B)\sqrt{B^2 - 4AC}}.$$

6.2 Numerična napaka-integral

Izračunajte integral $I_n = \int_0^1 e^{1-t} t^n dt$ s pomočjo rekurzijske formule

$$I_{n+1} = (n+1) I_n - 1; \quad n = 0,1,2,.... \qquad I_0 = e - 1$$

Izpeljava (integriranje po delih $u = e^{-t}; dv = t^n dt$):

$$I_n = e\int_0^1 e^{-t} t^n dt = \frac{e}{n+1}\left(t^{n+1} e^{-t}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-t} t^{n+1} dt \right) = \frac{1}{n+1}\left(1 + I_{n+1}\right) \Rightarrow I_{n+1} = (n+1) I_n - 1$$

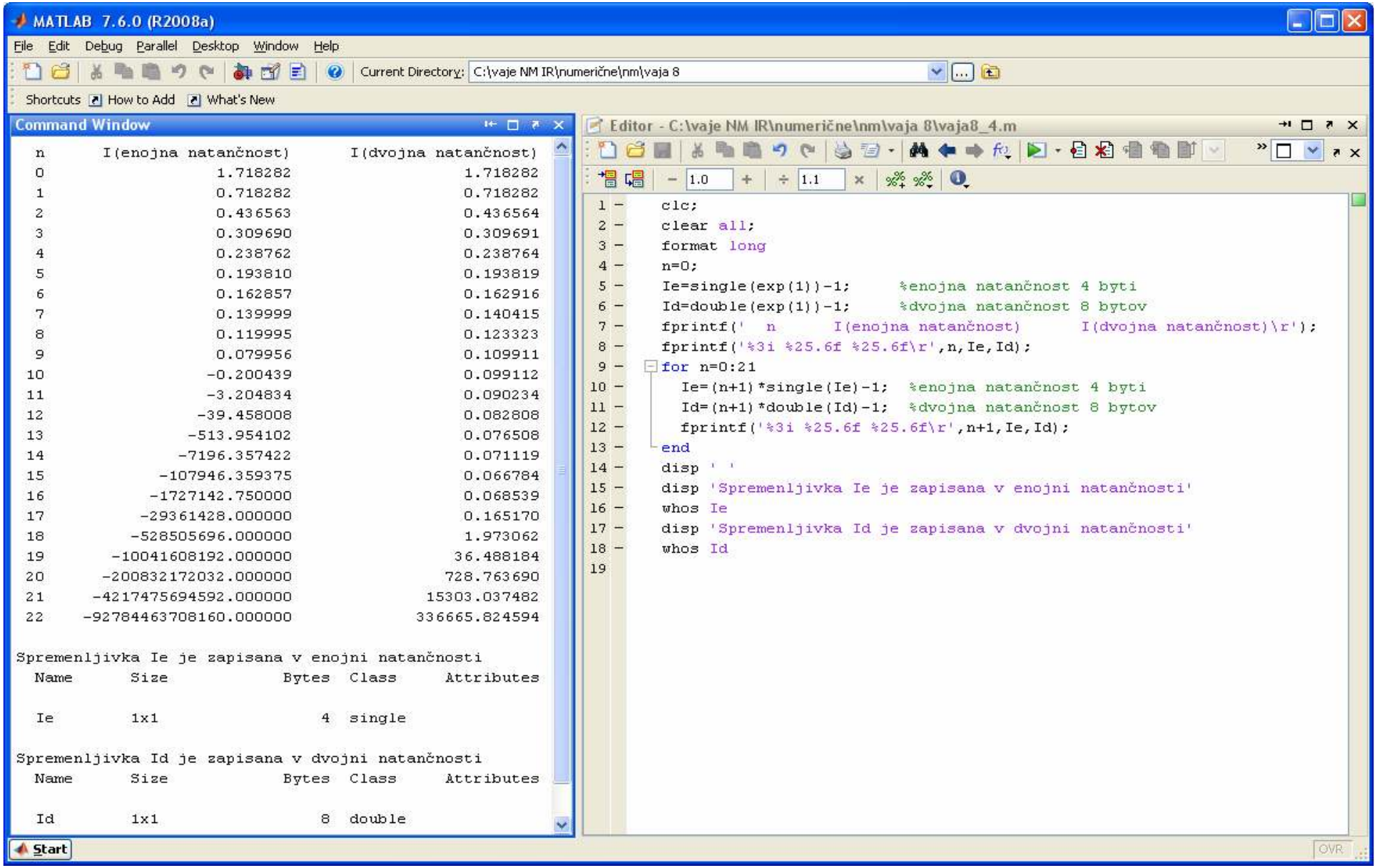
Izračunajte integral tudi pri obrnjeni rekurzijski formuli

$$I_n = \frac{I_{n+1} + 1}{n+1}$$

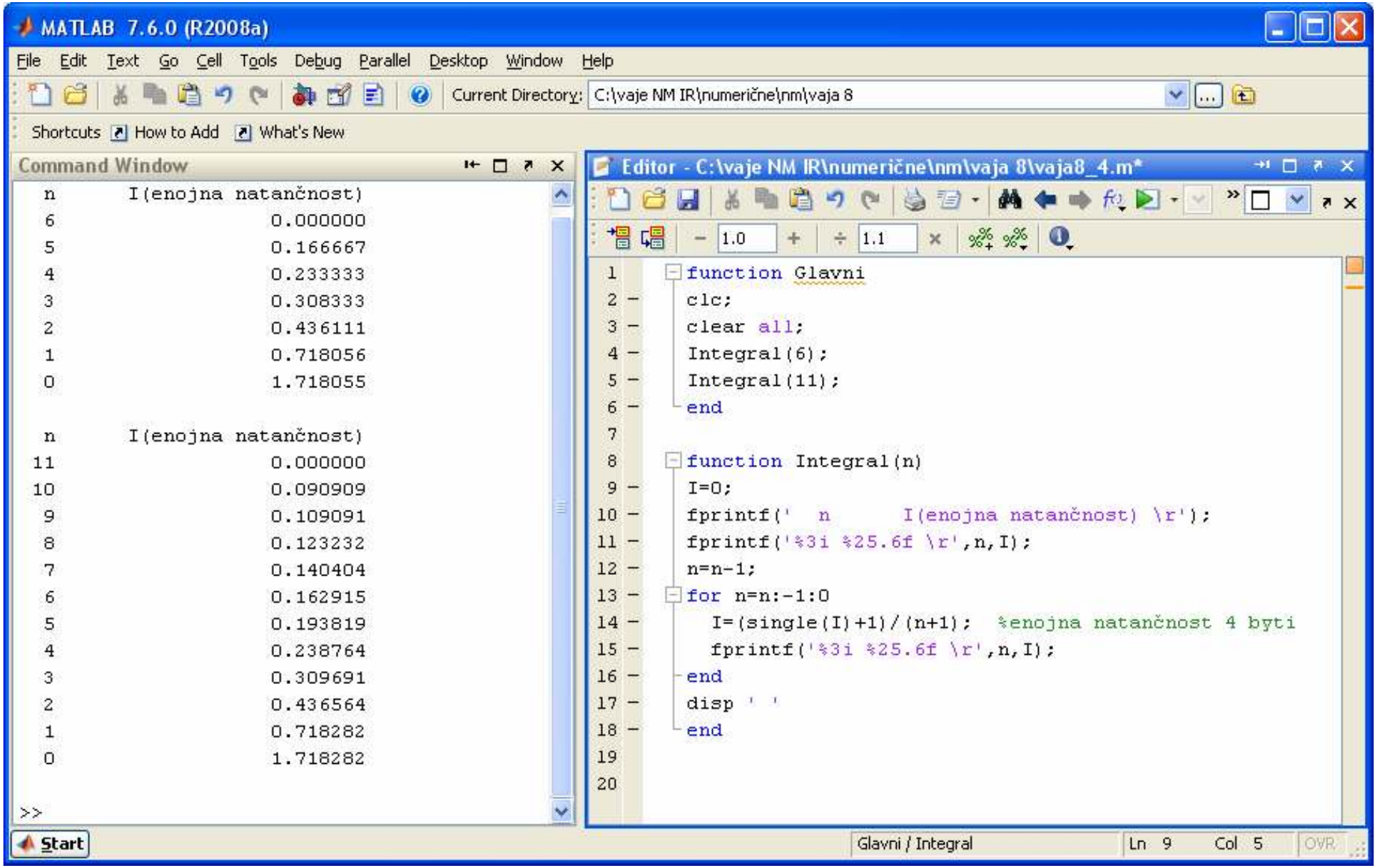
Opomba: Matlabova funkcija single() računa z manjšo natančnostjo (4 byti)

Matlabova funkcija double() računa z večjo natančnostjo (8 bytov)

6.2a Numerična napaka-integral



6.2b Numerična napaka-integral



6.3 Numerična napaka-zaporedje

Imamo zaporedje $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ldots,\frac{1}{3^n}=p_n,\ \ n=0,1,2,\ldots$

Zapiši zaporedje na tri načine:

-z Matlabovim vektorskim zapisom

-kot zaporedje: $p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n,\ \ p_0=1,\ \ n=0,1,2,\ldots$

-kot zaporedje: $p_{n+1}=p_{n-1}-\frac{8}{3}p_n,\ \ p_0=1,\ \ p_1=\frac{1}{3}$

Opazuj napako pri rekurzivnem odštevanju.

6.3 Numerična napaka-zaporedje

C:\vaje NM IR\numerične\nm\vaja 8\vaja8_7.m

File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help

```
1  clc;clear all;format long
2  N=26;
3  p1 = (1/3).^(0:N);  %matlab izračun v vektorju
4
5  p2(1) = p1(1);   %začetne vrednosti
6  p2(2) = p1(2);
7  p3(1) = p1(1);
8  p3(2) = p1(2);
9
10 for n = 1:N
11     p2(n+1) = (1/3)*p2(n);     %izračun zaporedja 1/3^n
12
13 end
14 disp ' '
15 for n = 2:N,
16     p3(n+1) = p3(n-1)-8/3*p3(n);   % izračun z odštevanjem
17
18 end
19 disp ' n          Vektor                Vrsta                Odštevanje'
20 for i=1:N
21   fprintf('%3i  %18.16f   %18.16f   %18.16f\n',i,p1(i),p2(i),p3(i))
22 end
23
24 plot([p2',p3'])
25
```

script Ln 24 Col 16 OVR

6.3 Numerična napaka-zaporedje

Rezultat