



## Tehniška mehanika 2

### Laboratorijske vaje

Dr. Janko Slavič

27. november 2012

1	Določitev aksialnega masnega vztrajnostnega momenta ojnice	2
2	Uravnoveženje rotorja	7
3	Trk	15
4	Frekvenčni odziv centrifugalno vzbujanega sistema	17
5	Mehanika tekočin	21
	Literatura	26

Gradivo podaja nujne izraze za sledenje laboratorijskim vajam, pri čemer se predpostavlja znanje s predavanj in vaj.

Študent:		
Lab. vaja	Datum	Podpis asistenta
Prva		
Druga		
Tretja		

Zadnja različica se nahaja na: <http://lab.fs.uni-lj.si/ladisk/data/pdf/LaboratorijskeVajeTM2.pdf>

# 1 Določitev aksialnega masnega vztrajnostnega momenta ojnice

## 1.1 Namen vaje

V gibalnih enačbah dinamike togih teles se pojavljajo veličine, ki so odvisne od mase in geometrijske oblike telesa. Imenujemo jih masni vztrajnostni momenti. Za posamezna, geometrijsko pravilno oblikovana in homogena telesa so te veličine lahko izračunljive po definicijskih enačbah. V tehniški praksi pa imamo pogosto opravka s strojnimi elementi, ki nimajo geometrijske podobnosti s kvadrom, valjem, kroglo, ipd., ampak so zapletenih oblik, neprimernih za enostaven matematičen popis geometrije. V takem primeru je dosti lažje in ponavadi tudi natančneje posredno izmeriti aksialni masni vztrajnostni moment strojnega elementa. Temu pristopu je namenjena ta vaja.

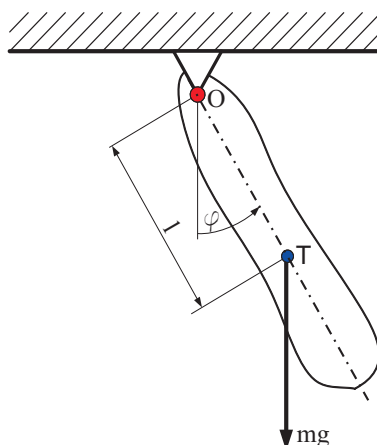
## 1.2 Definicija naloge

Določite aksialni masni vztrajnostni moment ojnice, prikazane na sliki 1. Uporabite teorijo fizikalnega nihala.



Slika 1: Ojnica.

## 1.3 Meritev na osnovi teorije fizikalnega nihala



Slika 2: Model fizikalnega nihala.

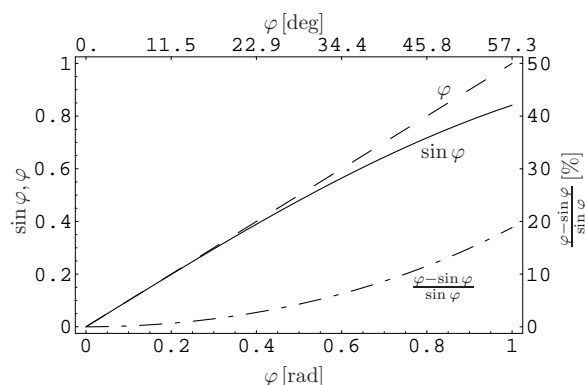
Model fizikalnega nihala v vertikalni ravnini (slika 2) predstavlja togo telo, obešeno v neki točki. Fizikalno nihalo mase  $m$  ima težišče v točki T, ki je za  $l$  oddaljena od vrtišča O. Sistem ima eno prostostno stopnjo in je konservativen. Za popis lege nihala izberemo koordinato  $\varphi$ , ki popisuje edino prostostno stopnjo. Gibalno enačbo fizikalnega nihala izpeljemo z uporabo II. Newtonovega zakona za rotacijo okoli nepomične osi O:

$$\sum M_O = J_O \ddot{\varphi}. \quad (1)$$

Glede na sliko 2 sledi:

$$- m g l \sin \varphi = J_O \ddot{\varphi}. \quad (2)$$

Funkcijo  $\sin(\varphi)$  lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli  $\varphi_0 = 0$ :  $\sin \varphi = \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} \dots$ . V kolikor predpostavimo majhne kote, se izkaže, da lahko člene druge in višje stopnje zanemarimo; napako, ki jo s tem naredimo, nam prikazuje slika 3. Pri kotu  $5^\circ$  je tako napaka, če namesto  $\sin \varphi$  uporabimo  $\varphi$  samo 0,13%, pri  $10^\circ$  pa 0,51% in nato hitro narašča. Kot majhne kote tako razumemo kote do nekaj kotnih stopinj (npr.  $5^\circ$ ).



Slika 3: Napaka pri majhnih kotih.

Ob upoštevanju predpostavke majhnih kotov izraz (2) preoblikujemo v:

$$J_O \ddot{\varphi} + m g l \varphi = 0, \quad (3)$$

oziroma:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (4)$$

kjer z  $\omega_0$  označimo lastno krožno frekvenco fizikalnega nihala. Lastna krožna frekvenca je lastnost sistema in je za fizikalno nihalo podana z enačbo:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m g l}{J_O}} = \frac{2\pi}{T_0}, \quad (5)$$

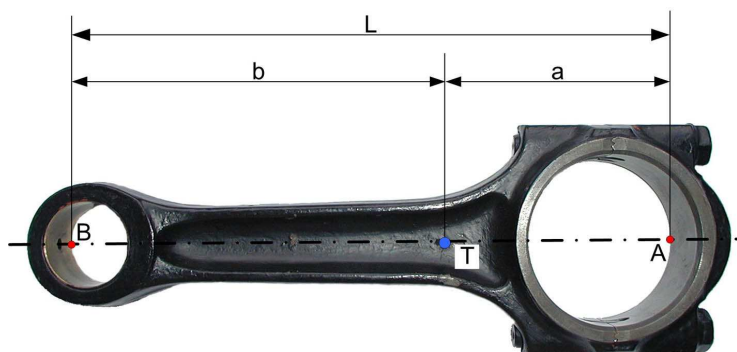
kjer je  $T_0$  nihajni čas lastnega nedušenega nihanja fizikalnega nihala.

### 1.3.1 Masni vztrajnostni moment ojnice glede na težišče

Naloga zahteva, da izmerimo masni vztrajnostni moment ojnice glede na težišče. Glede na izraz (5) bi lahko izmerili masni vztrajnostni moment glede na vrtilišče O.

V nadaljevanju bomo pokazali, da lahko, če izmerimo masni vztrajnostni moment okoli dveh različnih vrtilišč in vemo kakšna je razdalja med njima, določimo tudi masni vztrajnostni moment glede na težišče.

Če ojnico na sliki 4 zanihamo okoli točke A in nato še okoli točke B kot fizikalno nihalo, potem lahko izmerimo nihajna časa lastnega nedušenega nihanja ojnice:  $T_{0A}$  in  $T_{0B}$ . Glede na izraz (5) lahko nato izračunamo masna vztrajnostna momenta glede na os A oziroma B:  $J_A, J_B$ . Ker pa nas dejansko zanima



Slika 4: Naris ojnice.

masni vztrajnostni moment glede na težišče  $J_T$ , lahko z uporabo Steinerjevega stavka zapišemo:

$$\omega_{0A} = \frac{2\pi}{T_{0A}} = \sqrt{\frac{m g a}{J_A}} = \sqrt{\frac{m g a}{J_T + m a^2}}, \quad (6)$$

$$\omega_{0B} = \frac{2\pi}{T_{0B}} = \sqrt{\frac{m g b}{J_B}} = \sqrt{\frac{m g (L - a)}{J_T + m (L - a)^2}}, \quad (7)$$

kjer je  $L$  izmerjena razdalja med točkama A in B in  $a$  neznana razdalja od točke A do težišča T (slika 4).

Imamo torej dve neznanki ( $J_T, a$ ) in dve enačbi (6,7). Iz izraza (6) izrazimo težiščni vztrajnostni moment ojnice  $J_T$ :

$$J_T = \frac{T_{0A}^2}{4\pi^2} m g a - m a^2 \quad (8)$$

in ga vstavimo v izraz (7) ter iz enačbe izrazimo  $a$ :

$$a = L \frac{g T_{0B}^2 - 4\pi^2 L}{g (T_{0A}^2 + T_{0B}^2) - 8\pi^2 L}. \quad (9)$$

Da lahko izračunamo masni vztrajnostni moment glede na težišče  $J_T$ , moramo izmeriti še maso ojnice  $m$ .

### 1.3.2 Meritve

#### Masa ojnice

Maso ojnice izmerimo s tehtnico.

*Kaj gre lahko narobe?*

- Napačno merjenje – položi ojnico na sredino merilne ploščadi.

### Razdalja med točkama A in B

Razdaljo  $L$  med točkama A in B izmerimo s kljunastim merilom.

*Kaj gre lahko narobe?*

- Napačen odčitek → ne izvleci merila iz merjenca, vrednost odčitaj v položaju meritve.
- Napačen odčitek → odčitaj merjeno vrednost le s tisto natančnostjo, ki jo nonij omogoča.
- Napačen odčitek → paralaksa, glej pravokotno na nonij.
- Napačen odčitek → odčitani vrednosti dodaj  $20\text{mm}$  širine čeljusti.

### Nihajni čas

Nihajni čas nihanja ojnice okoli točke A, kot tudi točke B, izmerimo s štoparico. Merimo čas večjega števila nihajev. Tako zmanjšamo (relativno) napako človeškega reakcijskega časa in netočnost pri določitvi skrajne lege nihala. Število merjenih nihajev naj bo med 10 in 30. Meritev nihajnih časov ponovimo 5-krat za primer A in 5-krat za primer B. Meri naj več različnih oseb.

*Kaj gre lahko narobe?*

- Prevelik začetni odmik (kot) od ravnovesne lege → linearna teorija predpostavlja nihanja z majhnimi ( $< 5^\circ$ ) amplitudami kotov.
- Napačen odčitek → odčitaj merjeno vrednost le s tisto natančnostjo, ki jo štoparica omogoča.
- Napačno število nihajev → ko pritisneš na sprožilec začneš šteti število nihajev z nič.
- Napačno število nihajev → merjenje časa ustaviš, ko nihalo po nekaj nihajih doseže izhodiščno lego.
- Napačen izračun → v izračunih upoštevaj čas enega nihaja.

### Pregled meritev in rezultati

Simbol	Vrednost	Enota
$m$		kg
$L$		m
$T_{0A}$		s
$T_{0B}$		s
$a$		m
$J_T$		$\text{kg m}^2$

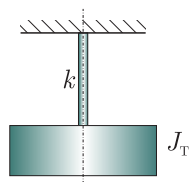
## 1.4 Meritev na osnovi teorije torzijskega nihala

Če uspemo izdelek katerega MVM nas zanima vpeti v težišču kot torzijsko nihalo, potem je MVM takega nihala relativno enostavno določiti iz ravnotežne enačbe (II. Newtonov zakon):

$$\sum M_T = J_T \ddot{\varphi}. \quad (10)$$

Če je  $k$  togost torzijske vzmeti (zanemarljive mase), potem je zunanji moment na merjenec  $M_T = -k \varphi$ , slika 5. Sledi:

$$-k \varphi = J_T \ddot{\varphi}. \quad (11)$$



Slika 5: Model torzijskega nihala.

Ko uredimo in normiramo izraz (11) izpeljemo:

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{J_T} \varphi = J_T, \quad (12)$$

kjer je lastna krožna frekvenca torzijskega nihala:

$$\omega_{0,T} = \sqrt{\frac{k}{J_T}}. \quad (13)$$

Ker v našem primeru ne poznamo togosti torzijske vzmeti  $k$ , je potrebno narediti najprej meritev z vzorcem znanega MVM  $J_{T,1}$ :

$$k = \omega_{0,T,1}^2 J_{T,1}, \quad (14)$$

kjer je:

$$\omega_{0,T,1} = \frac{2\pi}{T_1}. \quad (15)$$

V drugem koraku nato naredimo meritev na neznanem MVM  $J_T$ :

$$J_T = \frac{k}{\omega_{0,T,2}^2}, \quad (16)$$

kjer je:

$$\omega_{0,T,2} = \frac{2\pi}{T_2}. \quad (17)$$

#### 1.4.1 Meritve

##### Pregled meritev in rezultati

Simbol	Vrednost	Enota
$J_{T,1}$		kg m <sup>2</sup>
$T_1$		s
$T_2$		s
$\omega_{0,T,1}$		rad/s
$k$		Nm/rad
$\omega_{0,T,2}$		rad/s
$J_T$		kg m <sup>2</sup>

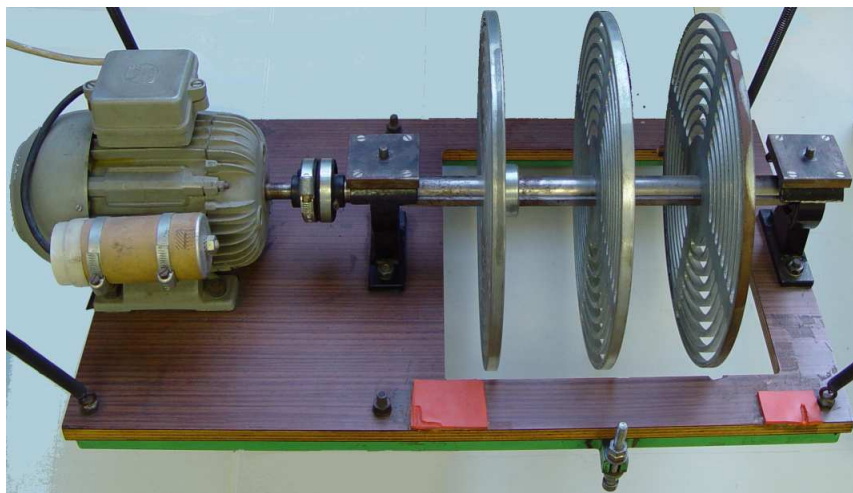
## 2 Uravnoveženje rotorja

### 2.1 Opis laboratorijske vaje

V prvem delu laboratorijske vaje je predstavljeno merjenje kvalitete uravnoveženja togega rotorja glede na standard ISO 10816-1, v drugem delu pa so podrobneje predstavljeni principi uravnoveženja togih rotorjev.

### 2.2 Merjenje kvalitete uravnoveženja

Kvaliteta uravnoveženja rotorja bo določena po standardu ISO 10816-1 na podlagi merjenja hitrosti vibracij na ležajnih mestih. Najprej določite kvaliteto uravnoveženja za rotor na sliki 6, nato pa še za rotor z dodanimi utežmi, s katerimi je rotor neuravnovežen.



Slika 6: Merjenje kvalitete neuravnoveženosti.

#### 2.2.1 Kvaliteta uravnoveženja rotorja

Posledica slabo uravnoveženega rotorja je povečan nivo vibracij, ki jih lahko izmerimo na ležajih. Za določevanje kvalitete uravnoveženja bomo torej izrabili njegovo posledico: velikost nivoja vibracij, katere sprejemljivost določimo glede na standard ISO 10816-1:1995<sup>1</sup>. Standard navaja, da je za večino naprav efektivna hitrost  $v_{\text{rms}}$  primerno merilo za oceno sprejemljivosti nivoja vibracij. To velja za relativno širok razpon hitrosti vrtenja naprav. Same naprave so razdeljene v več razredov:

- Razred I** Majhne naprave (električni motorji moči do 15kW).
- Razred II** Srednje velike naprave moči 15kW do 75kW brez posebnih temeljev ali togo pritrjene naprave do 300kW na posebnih temeljih.
- Razred III** Velike naprave na velikih togih temeljih.
- Razred IV** Velike naprave na relativno mehkih temeljih.

Posamezno napravo iz določenega razreda naprav nato glede na izmerjeni nivo vibracij s pomočjo tabele 1 razvrstimo v eno od štirih obratovalnih področij:

<sup>1</sup>ISO 10816-1:1995 Mechanical vibration – Evaluation of machine vibration by measurements on non-rotating parts – Part 1: General guidelines

- Področje A** Večina novih naprav naj bi spadala v to področje.
- Področje B** Naprave v tem področju so ponavadi ustrezne za dolgotrajno obratovanje.
- Področje C** Naprave v tem področju so ponavadi neustrezne za dolgotrajno obratovanje. Časovno omejeno delovanje naprav je dovoljeno.
- Področje D** Oscilacije v tem področju lahko resno poškodujejo napravo.

Tabela 1: Vrednotenje sprejemljivosti nivoja vibracij po standardu ISO 10816-1:1995.

$v_{\text{rms}}$ [mm/s]	Razred I	Razred II	Razred III	Razred IV	
0,28	A	A	A	A	
0,45					
0,71					
1,12	B	B	C	B	
1,80					
2,80	C	C	C	C	
4,50					
7,10	D	D	C	C	
11,2					
18,0			D	D	D
28,0					
45,0					

### 2.2.2 Izvedba meritve

Hitrosti v ležajih merimo s pomočjo namenske naprave Vibrobalans (Galeb). Naprava izmeri efektivno ali tudi rms (root-mean-square) hitrost, ki je definirana kot:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt} \quad (18)$$

S pomočjo stroboskopske svetilke izmerite še hitrost vrtenja rotorja. Kakšna je povezava med efektivno hitrostjo in efektivnim pomikom v ležaju?

#### Pregled meritev in rezultati

Simbol	Vrednost	Enota
--------	----------	-------

Začetno stanje

$n$		obr/min
$v_{\text{rms},1}$		mm/s
$v_{\text{rms},2}$		mm/s
$s_{\text{rms},1}$		$\mu\text{m}$
$s_{\text{rms},2}$		$\mu\text{m}$

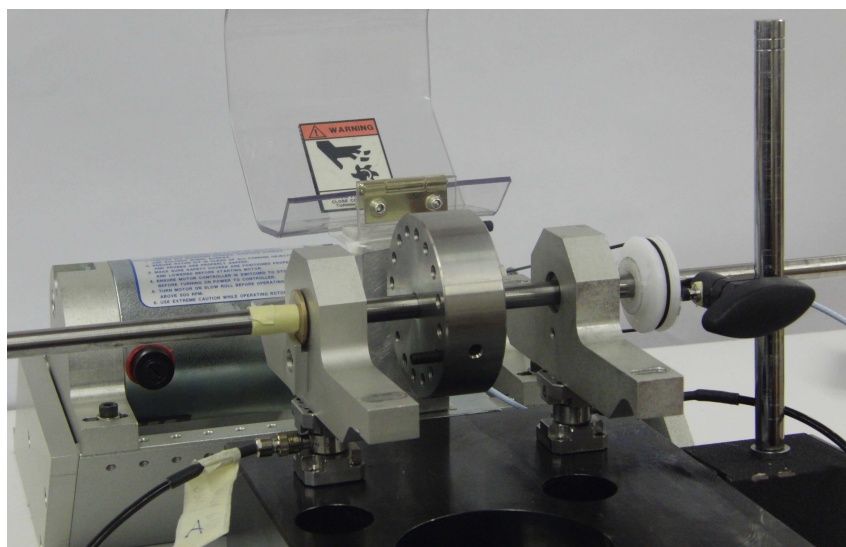
Uravnoveženo stanje

$v_{\text{rms},1}$		mm/s
$v_{\text{rms},2}$		mm/s
$s_{\text{rms},1}$		$\mu\text{m}$
$s_{\text{rms},2}$		$\mu\text{m}$



## 2.3 Uravnoteženje togega rotorja

Na sliki 7 je prikazan sistem s togim rotorjem. V okviru laboratorijske vaje boste spoznali merjenje sil v ležajih kot posledica neuravnoveženosti rotorja in tudi uravnoteženje takega rotorja.



Slika 7: Merjenje neuravnoveženosti.

### 2.3.1 Teoretične osnove

Pri rotaciji togega telesa okrog stalne osi se na ležajnih mestih pojavijo dinamične sile. Vrteči se koordinatni sistem  $x'y'z'$  je orientiran tako, da leži težišče togega rotorja na ravnini  $x'z'$  (slika 8):

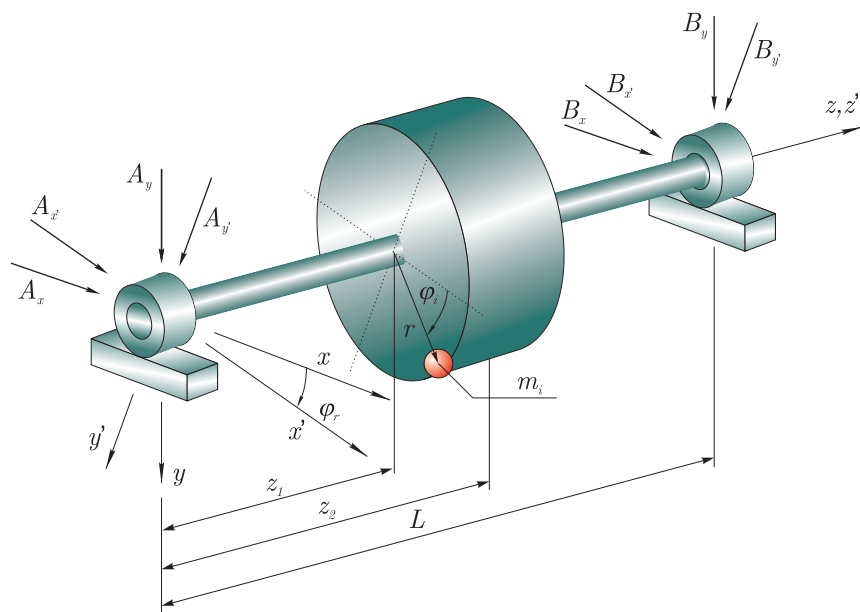
$$\begin{aligned}\sum F_{x',i} &= A_{x'} + B_{x'} = -m e \dot{\varphi}^2 \\ \sum F_{y',i} &= A_{y'} + B_{y'} = 0\end{aligned}\tag{19}$$

$$\sum F_{z',i} = 0$$

$$\begin{aligned}\sum M_{x'} &= -B_{y'} L = -J_{x'z'} \ddot{\varphi} + J_{y'z'} \dot{\varphi}^2 \\ \sum M_{y'} &= B_{x'} L = -J_{x'z'} \dot{\varphi}^2 - J_{y'z'} \ddot{\varphi}.\end{aligned}\tag{20}$$

$$\sum M_{z'} = J_{z'z'} \ddot{\varphi},$$

kjer so  $A_{x'}$ ,  $A_{y'}$ ,  $B_{x'}$  in  $B_{y'}$  sile v ležajih v vrtečem se koordinatnem sistemu  $x'y'z'$ ,  $L$  je razdalja med ležajema,  $J_{y'z'}$  in  $J_{x'z'}$  pa sta deviacijska masna vztrajnostna momenta.  $m$  je celotna masa rotorja,  $e$  je ekscentričnost,  $\dot{\varphi}$  je kotna hitrost in  $\ddot{\varphi}$  kotni pospešek.



Slika 8: Vrtenje rotorja okrog stalne osi.

Iz gibalnih enačb (19) in (20) je razvidno, da so pri konstantni vrtilni hitrosti  $\dot{\varphi}$  rotorja ( $\ddot{\varphi} = 0$ ) dinamične sile na ležaje enake nič, kadar velja:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_T &= \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \mathbf{0} \\ J_{y'z'} &= 0 \\ J_{x'z'} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$\mathbf{r}_T$  je vektor težišča rotorja.

Izkaže se, da lahko dinamično uravnoteženje izvedemo z uporabo najmanj dveh uteži mas  $m_1$  in  $m_2$ , ki jih dodamo na različnih razdaljah  $z_1$  in  $z_2$  (glede na koordinatno izhodišče) ter polmeru  $r$ . Z uporabo enačb (19) ter (20) je mogoče izpeljati  $m$ ,  $J_{x'z'}$  ter  $J_{y'z'}$ , položaj in maso uteži pa se določi na podlagi enačbe (21).

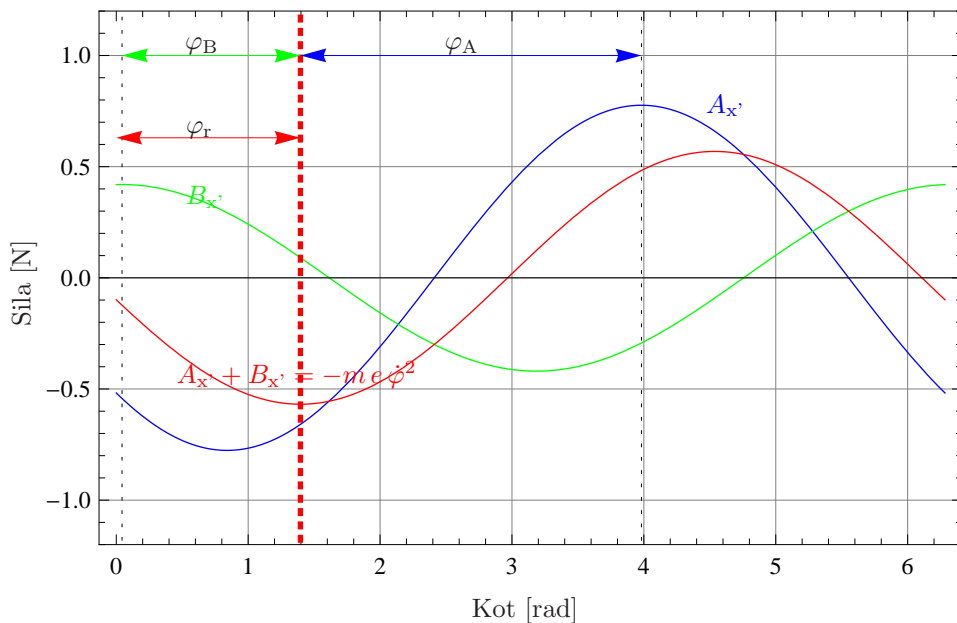
### 2.3.2 Postopek uravnoteženja rotorja

Preizkuševališče je prikazano na sliki 7. Rotor je uležajen z dvema drsnima ležajema, ki sta pritrjena na silomera. Silomera merita *reakcijske* sile na ležaja in sta pritrjena na jekleno podlago bistveno večje mase, kakor jo ima rotor. Rotor je gnan preko jermenskega prenosa, s čimer zmanjšamo vpliv zunanjih sil.

Pri konstantnem vrtenju rotorja se na posameznem ležajnem mestu zaradi neuravnoteženosti rotorja pojavi dinamična sila, ki ima komponenti v smeri  $x$  in  $y$ . Ta sila ima konstantno amplitudo, ki kroži s kotno hitrostjo  $\dot{\varphi}$  rotorja, zato zadostuje merjenje sil v eni smeri. Rezultat meritve je časovni potek sil v podporah  $A_x$  in  $B_x$  za en vrtljaj, kot je prikazano na sliki 9. Merjenje se prične, ko leži referenčna točka na rotorju v ravnini  $xz$  (referenčna točka je na rotorju označena z "0°"). Čas merjenja je enak času enega vrtljaja  $T_0$ .

Najprej je potrebno določiti fazni zamik vrtečega se koordinatnega sistema  $x'y'z'$ . Težišče, ki leži na ravnini  $x'z'$  bo soležno z ravnino  $xz$  v tistem trenutku, ko bo izmerjena sila  $A_x + B_x$  minimalna: na

sliki 9 je ta tako stanje prikazano pri kotu  $\varphi_r$ . V krožnem diagramu vrtečega se koordinatnega sistema  $x'y'z'$  na sliki 10 lahko narišemo težišče na os  $x'$ , vsota pomerjenih sil pa leži na isti osi, vendar na negativnem delu. Za konkreten primer na sliki 9 vidimo, da sila  $A$  prehiteva težišče za  $\varphi_A$ , sila  $B$ , pa zaostaja za  $\varphi_B$ . Obe sili tudi lahko narišemo v krožni diagram (slika 10). Iz krožnega diagrama določite še ostale veličine:  $A_{x'}$ ,  $A_{y'}$ ,  $B_{x'}$ ,  $B_{y'}$ .



Slika 9: Izmerjena sila

Iz enačb (19) ter (20) se lahko izračuna  $m e$ ,  $J_{x'z'}$  ter  $J_{y'z'}$ .

$$m e = -(A_{x'} + B_{x'})/\dot{\varphi}^2 \quad (22)$$

$$J_{y'z'} = -B_{y'} L/\dot{\varphi}^2 \quad (23)$$

$$J_{x'z'} = -B_{x'} L/\dot{\varphi}^2 \quad (24)$$

Če želimo sistem uravnotežiti, potem moramo dodati dve masi ( $m_1$  in  $m_2$ ) na dveh različnih ravninah ( $z_1$  in  $z_2$ ); polmer pa je v obeh primerih enak  $r$ . Na podlagi enačbe (21) se zapiše sistem šestih enačb s šestimi neznankami ( $m_1$ ,  $m_2$ ,  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $x_2$ ,  $y_2$ ):

$$0 = m e + m_1 x_1 + m_2 x_2, \quad \text{težišče v } x' \text{ smeri} \quad (25)$$

$$0 = m_1 y_1 + m_2 y_2, \quad \text{težišče v } y' \text{ smeri} \quad (26)$$

$$0 = J_{y'z'} + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2, \quad (27)$$

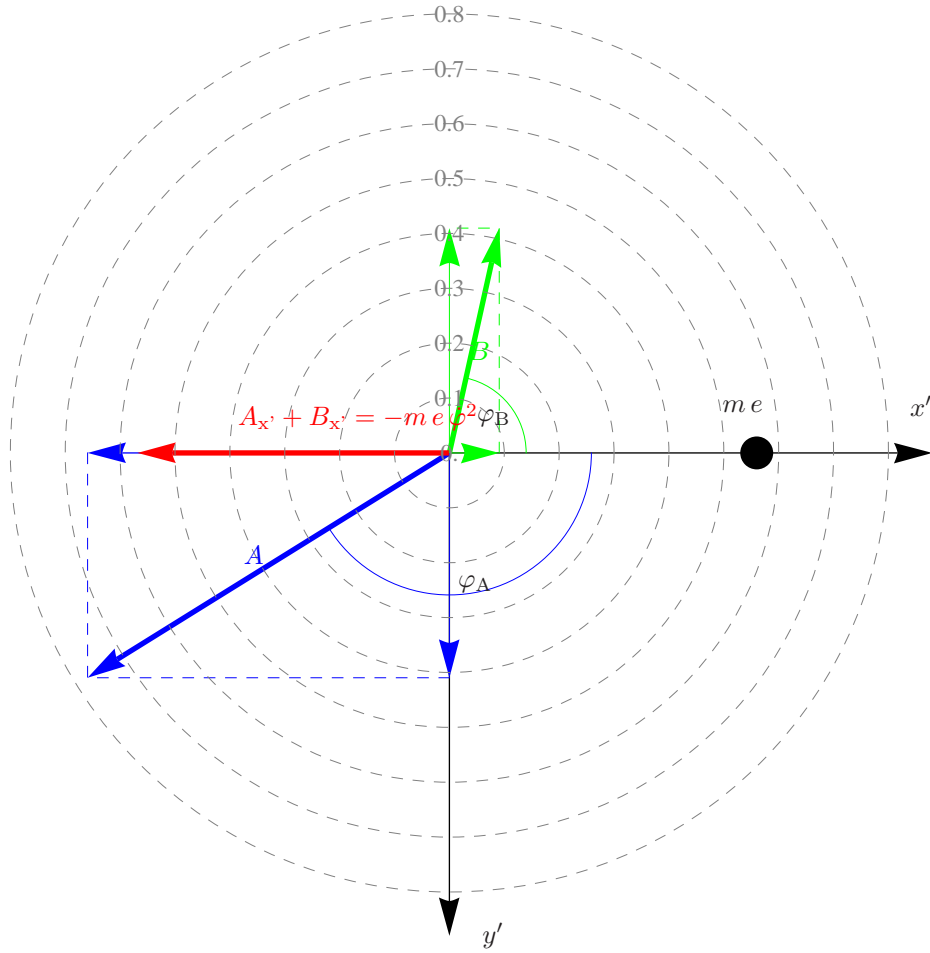
$$0 = J_{x'z'} + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2, \quad (28)$$

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad (29)$$

$$r^2 = x_2^2 + y_2^2. \quad (30)$$

Obstajajo štiri možne rešitve, samo ena ima obe masi pozitivni (dodajanje mase):

$$m_1 = \frac{\sqrt{(J_{x'z'} - m e z_2)^2 + J_{y'z'}^2}}{\sqrt{r^2(z_1 - z_2)^2}} \quad (31)$$



Slika 10: Krožni diagram sil.

$$m_2 = \frac{\sqrt{(J_{x'z'} - me z_1)^2 + J_{y'z'}^2}}{\sqrt{r^2(z_1 - z_2)^2}} \quad (32)$$

$$x'_1 = \frac{r(z_1 - z_2)(me z_2 - J_{x'z'})}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2} \sqrt{(J_{x'z'} - me z_2)^2 + J_{y'z'}^2}} \quad (33)$$

$$y'_1 = \frac{J_{y'z'} r(z_2 - z_1)}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2} \sqrt{(J_{x'z'} - me z_2)^2 + J_{y'z'}^2}} \quad (34)$$

$$x'_2 = \frac{r(z_1 - z_2)(J_{x'z'} - me z_1)}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2} \sqrt{(J_{x'z'} - me z_1)^2 + J_{y'z'}^2}} \quad (35)$$

$$y'_2 = \frac{J_{y'z'} r(z_1 - z_2)}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2} \sqrt{(J_{x'z'} - me z_1)^2 + J_{y'z'}^2}} \quad (36)$$

$$(37)$$

Izračunajte še kota  $\varphi_1$  in  $\varphi_2$

### 2.3.3 Meritve

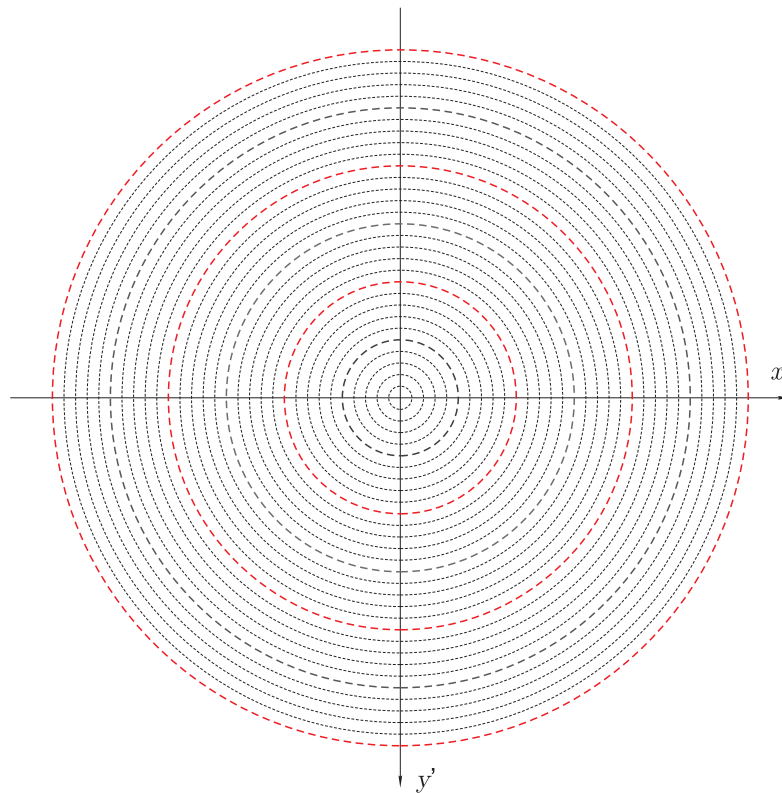
#### Merjenje sil v ležajih

Sile na ležajnih mestih  $A$  in  $B$  v smeri  $x$  so izmerjene s silomerom (slika 8). Položaj (faza) rotorja je določen z induktivnim senzorjem. Zajem podatkov je izveden z merilno opremo podjetja National Instruments v programu LabView.

Pri izvajanju meritve je potrebno paziti na naslednje:

- Da je pri zajemanju signala sil uporabljen nizkopasovni filter.
- Sile merijo reakcijske sile. Razmislite o predznakih!
- Uteži na rotorju morajo biti privijačene tako, da se pri rotaciji ne morejo odvijati, obvezno pa mora imeti rotor zaščito.
- Meritev mora biti izvedena takrat, ko ima rotor konstantno vrtilno hitrost, brez pospeševanja.

#### Pregled meritev in rezultati



Slika 11: Vrišite izmerjene sile v krožnem diagram.

Simbol	Vrednost	Enota
--------	----------	-------

Podatki preizkuševališča

$L$		m
$z_1$		m
$z_2$		m
$r$		m

Podatki pri obratovanju

$T_0$		s
$\dot{\varphi}$		rad/s
$A_{x'}$		N
$A_{y'}$		N
$\varphi_A$		s
$B_{x'}$		N
$B_{y'}$		N
$\varphi_B$		s
$\varphi_r$		s

Izračun

$m_e$		kg m
$J_{y'z'}$		kg m <sup>2</sup>
$J_{x'z'}$		kg m <sup>2</sup>
$m_1$		gram
$m_2$		gram
$x_1$		m
$y_1$		m
$x_2$		m
$y_2$		m
$\varphi_1$		°
$\varphi_2$		°

### 3 Trk

#### 3.1 Namen vaje

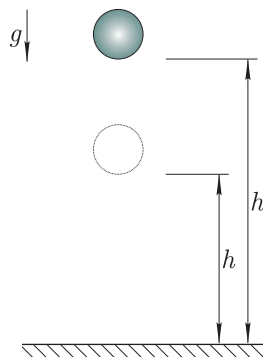
Namen vaje je eksperimentalno izmeriti koeficient trka različnih krogel z različnimi podlagami.

#### 3.2 Definicija naloge

Slika 12 prikazuje preprost eksperiment za določanje koeficienta trka. Kroglo spustite iz višine  $h$  in izmerite višino  $h'$  do katere se žoga odbije. Preverite vpliv *podlage*, *višine* in *materiala žoge*:

- podlaga 1, krogla 1,
- podlaga 2, krogla 1,
- podlaga 1, krogla 2,
- podlaga 1, krogla 3,
- podlaga 1, krogla 1, višina 1
- podlaga 1, krogla 1, višina 2

Za vsak primer naredite najmanj pet poizkusov ter izračunajte povprečje.



Slika 12: Postavitev eksperimenta.

**Pregled meritev in rezultati**

Simbol	M1	M2	M3	M4	M5	Enota
--------	----	----	----	----	----	-------

Podlaga:

Žoga:

$h$						m
$h'$						m
$v$						m/s
$v'$						m/s
$\varepsilon$						
$\bar{\varepsilon}$						

Podlaga:

Žoga:

$h$						m
$h'$						m
$v$						m/s
$v'$						m/s
$\varepsilon$						
$\bar{\varepsilon}$						

Podlaga:

Žoga:

$h$						m
$h'$						m
$v$						m/s
$v'$						m/s
$\varepsilon$						
$\bar{\varepsilon}$						

Podlaga:

Žoga:

$h$						m
$h'$						m
$v$						m/s
$v'$						m/s
$\varepsilon$						
$\bar{\varepsilon}$						

Podlaga:

Žoga:

$h$						m
$h'$						m
$v$						m/s
$v'$						m/s
$\varepsilon$						
$\bar{\varepsilon}$						

Podlaga:

Žoga:

$h$						m
$h'$						m
$v$						m/s
$v'$						m/s
$\varepsilon$						
$\bar{\varepsilon}$						



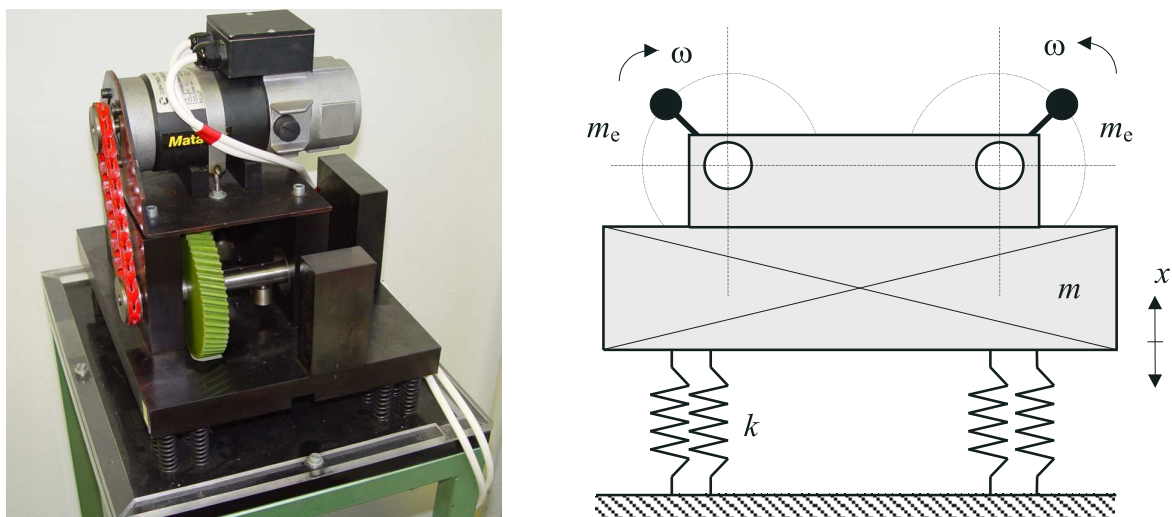
## 4 Frekvenčni odziv centrifugalno vzbujanega sistema

### 4.1 Namen vaje

V strojniški praksi je centrifugalno vzbujanje velikokrat izvor vibracij strojev in naprav. V nekaterih primerih namensko dodamo izvor vibracij v sistem, npr. vibracijska sita, dozatorji razsutega materiala, ..., v drugih primerih pa je tak izvor vibracij moteč, npr. neuravnoteženi rotor turbine, ... Z namenom, da bi spoznali fenomen centrifugalnega vzbujanja, se bomo tukaj ukvarjali z analizo osnovnega modela centrifugalnega vzbujanja.

### 4.2 Definicija naloge

Za sistem na sliki 13 določite razmernik dušenja in lastno dušeno krožno frekvenco. Z meritvami določite frekvenčni odziv sistema zaradi centrifugalnega vzbujanja v ustaljenem stanju. Merjeni frekvenčni odziv primerjajte s teoretičnim. Kot je razvidno iz slike 13, smo predpostavili model z eno prostostno stopnjo.



Slika 13: Centrifugalno vzbujan sistem. Levo: sistem, desno: fizikalni model.

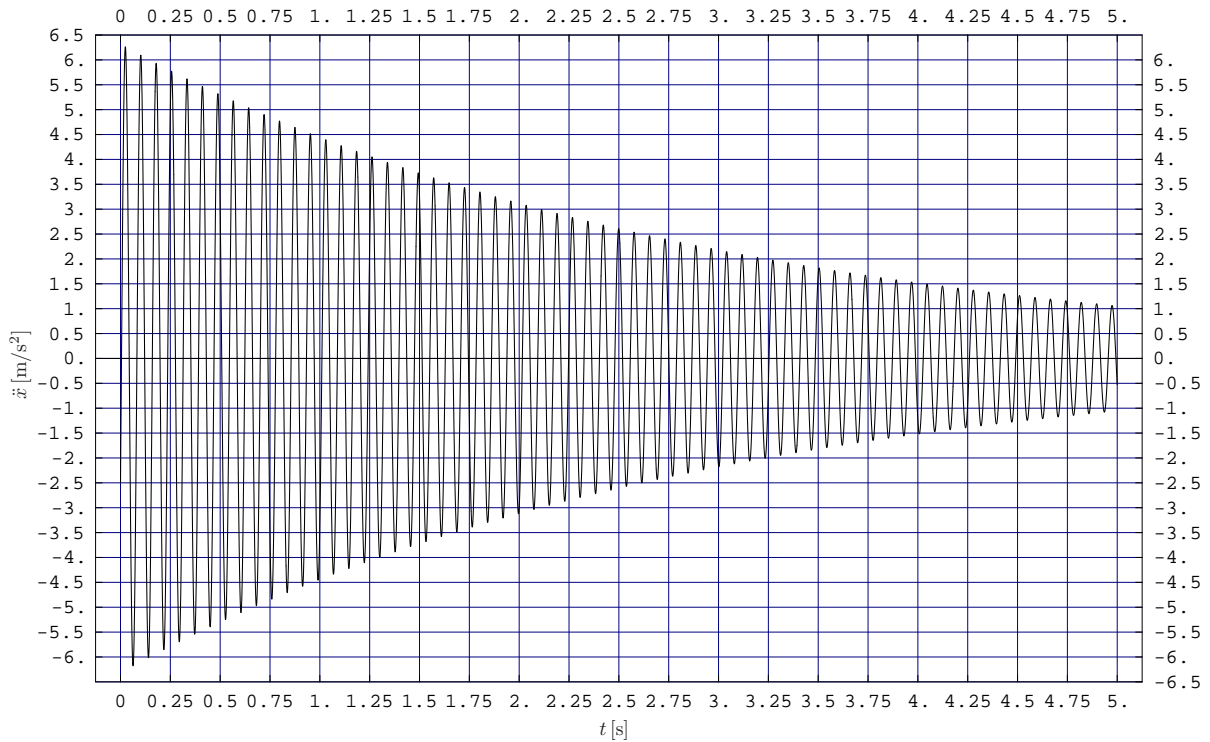
Podatki:

$$\begin{aligned}m &= 36,7 \text{ kg} \\m_e &= 0,03 \text{ kg} \\e &= 30 \text{ mm} \\k &= 243 \text{ kN/m}\end{aligned}$$

### 4.3 Izvedba vaje

#### 4.3.1 Lastno dušeno nihanje

Iz slike 14, ki prikazuje lasten dušen odziv nihala na sliki 13, lahko določimo razmernik dušenja  $\delta$  in lastno krožno frekvenco dušenega nihanja  $\omega_{0d}$ .



Slika 14: Lasten dušen odziv sistema.

Poglejmo, kako pridemo do iskanih parametrov: gre za preprost sistem masa–vzmet–dušilka, za katerega lahko izpeljemo gibalno enačbo:

$$m \ddot{x} + d \dot{x} + k x = 0. \quad (38)$$

Gibalno enačbo normiramo (delimo z maso  $m$ ) in zapišemo v splošni obliki:

$$\ddot{x} + 2 \delta \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (39)$$

kjer je  $\delta$  razmernik dušenja,  $\omega_0$  pa lastna krožna frekvenca nedušenega nihanja. Glede na gibalno enačbo (39), pričakujemo odziv oblike:

$$x(t) = e^{-\delta \omega_0 t} [A \cos(\omega_{0d} t) + B \sin(\omega_{0d} t)], \quad (40)$$

kjer je  $\omega_{0d} = \omega_0 \sqrt{1 - \delta^2}$  lastna krožna frekvenca dušenega nihanja in A in B konstanti odvisni od začetnih pogojev.

Pri lahko dušenih sistemih  $\delta \ll 1$  se izkaže, da se lastna nedušena  $\omega_0$  in lastna dušena krožna frekvenca  $\omega_{0d}$  relativno malo razlikujeta. Če torej uporabimo poenostavitev  $\omega_0 \approx \omega_{0d}$ , lahko s pomočjo izraza (40), slike 14 ter malo sklepanja določimo razmernik dušenja  $\delta$  in lastno krožno frekvenco dušenega nihanja  $\omega_{0d}$ .

#### 4.3.2 Frekvenčni odziv sistema

Za centrifugalno vzbujanje sistema na sliki 13 je ob predpostavki  $m_e \ll m$  gibalna enačba:

$$(m + m_e) \ddot{x} + d \dot{x} + k x = m_e e \omega^2 \sin(\omega t). \quad (41)$$

Izraz (41) normiramo in zapišemo v splošni obliki:

$$\ddot{x} + 2\delta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f_0 \sin(\omega t), \quad (42)$$

kjer je  $f_0 = \frac{m_e e \omega^2}{m_e + m}$ . Za tako vzbuhan sistem pričakujemo v *ustaljenem stanju* odziv:

$$x(t) = X \sin(\omega t - \phi), \quad (43)$$

kjer je amplituda nihanja v ustaljenem stanju:

$$X = X_0 \beta \quad (44)$$

in

$$X_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2} \quad (45)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\delta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (46)$$

Izraza (44) in (45) preoblikujemo v t.i. izraz normiranih amplitud v odvisnosti od vzbujevalne frekvence:

$$\gamma = \frac{X}{\frac{m_e e}{m_e + m}} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \beta. \quad (47)$$

Tako smo prišli do frekvenčnega odziva sistema. Frekvenčni odziv glede na meritve dobimo tako, da pomerimo amplitude pomikov  $X$  pri določeni frekvenci vzbujanja  $\omega$  in uporabimo prvi del izraza (47). Frekvenčni odziv glede na meritve primerjamo s teoretičnim frekvenčnim odzivom, ki ga dobimo tako, da za določeno vzbujevalno krožno frekvenco  $\omega$  izračunamo drugi del izraza (47).

### 4.3.3 Meritve

#### Merjenje amplitude pomikov vsiljenega nihanja

Pri vzbujanju s centrifugalno silo vzbujevalne krožne frekvence  $\omega$  želimo pomeriti amplitudo nihanja. Ker pa s pospeškomerom izmerimo pospeške, moramo uporabiti povezavo med amplitudo pospeška  $\ddot{X}$  in amplitudo pomika  $X$  za sinusni signal:

$$\ddot{X} = -\omega^2 X. \quad (48)$$

Meritve izvedemo na naslednji način:

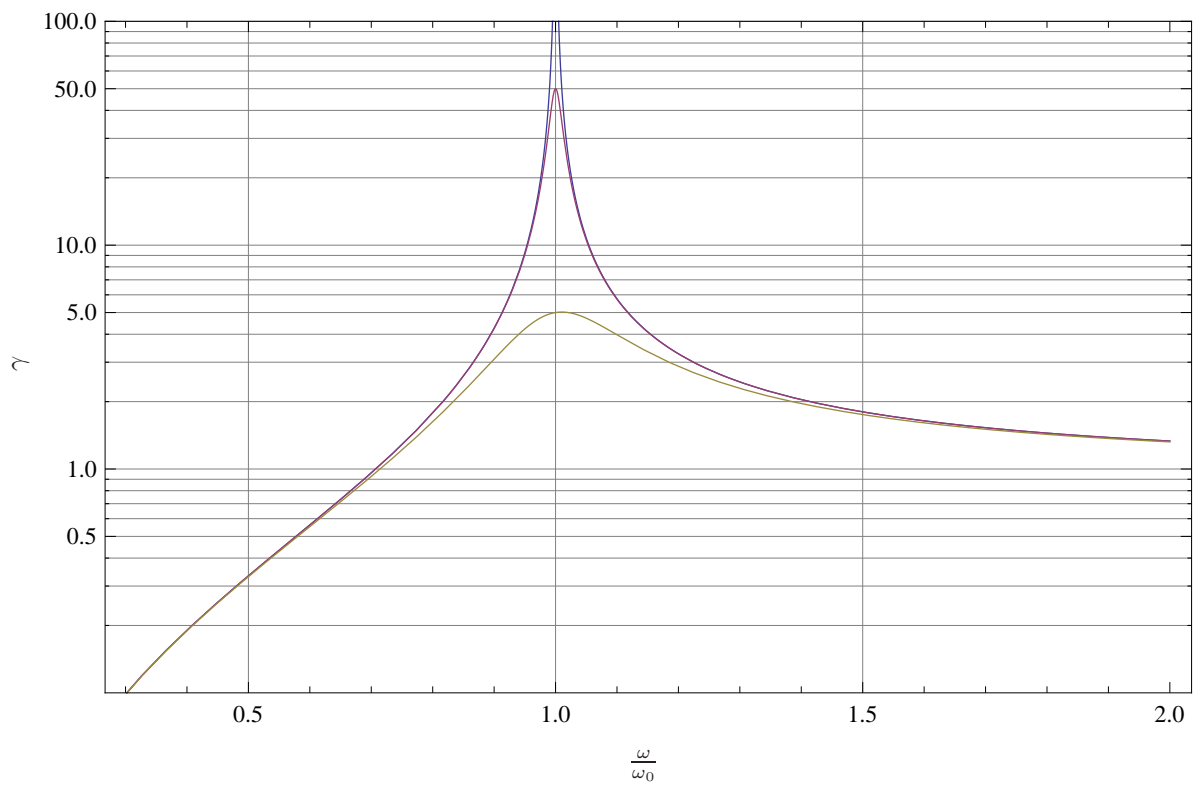
1. nastavimo željeno kotno hitrost elektromotorja v ob/min,
2. počakamo, da se tranzient izniha,
3. na osciloskopu zamrznemo sliko in odčitamo dvojno amplitudo nihanja,
4. vrnemo se na prvo točko.

### Pregled meritev in rezultati

Simbol	Vrednost	Enota
--------	----------	-------

Podatki preizkuševališča

$\omega_0$		rad/s
$f_0$		Hz



Slika 15: Funkcija  $\gamma$  pri različnih stopnjah dušenja ( $\delta = 0$ ,  $\delta = 0,01$ ,  $\delta = 0,1$ ). Vrišite izmerjene točke.

## 5 Mehanika tekočin

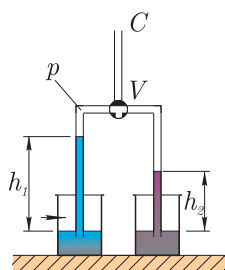
### 5.1 Gostota kapljevine

Na sliki 16 je prikazana naprava za merjenje gostote kapljevine. V eno posodo natočite vodo, v drugo posodo pa neznano tekočino, nato odprite ventil V in s cevjo C izsesajte nekaj zraka ter zaprite ventil C. Opazite, da sta višini stolpcev  $h_1$  in  $h_2$  v piezometrih različni.

Iz razlike piezometričnih višin, ki jo opazimo pri eksperimentu, lahko določimo gostoto neznane kapljevine. Določite jo!

Pri reševanju vam naj bo v pomoč sledeče: če je na gladini določene kapljevine tlak  $p_g$ , potem se hidrostatični tlak  $p_{g2}$  tekočine gostote  $\rho$  z globino  $h$  spreminja glede na izraz ( $g=9,81 \text{ m/s}^2$ ):

$$p_{g2} = p_g + \rho g h. \quad (49)$$



Slika 16: Eksperimentalna priprava.

#### Pregled meritev in rezultati

Simbol	Vrednost	Enota
$h_1$		m
$h_2$		m
$\rho_{\text{H}_2\text{O}}$		$\text{kg/m}^3$
$\rho?$		$\text{kg/m}^3$

## 5.2 Linijske izgube

Na sliki 17 je prikazana naprava za preučevanje linijskih izgub v cevovodu. Iztočno odprtino cevi začepite in v večjo posodo nalijte vodo do višine  $H$ . Pod iztočno odprtino cevi postavite posodo in izmerite volumen  $V$  vode, ki se je natekla v posodo v času  $t$  (pri tem dolivajte vodo v večjo posodo, da bo gladina ostala na višini  $H$ ).

Ponovite poizkus, vendar sedaj razliko višine vode med prvim in zadnjim piezometrom  $h$  ter dolžino  $L$  med njima. Izmerite še notranji premer cevovoda  $d$  in temperaturo  $T$  vode.

Iz izmerjenih veličin določite povprečno pretočno hitrost  $q_v$ , povprečno hitrost kapljevine v cevovodu  $v$ , Reynoldsovo število  $Re$  za tok v cevovodu,

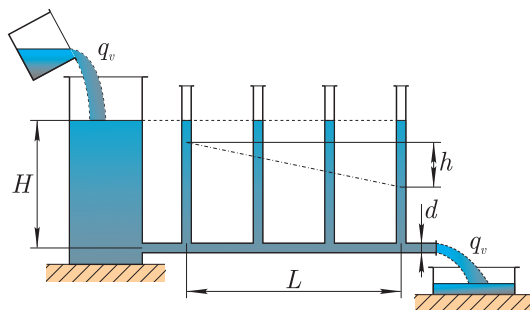
V pomoč vam na bo izraz za Reynoldsovo število za cevovod premera  $d$  v katerem se kapljevina giblje s hitrostjo  $v$ :

$$Re = \frac{v D}{\nu}, \quad (50)$$

kjer je  $\nu = \eta/\rho$  kinematična viskoznost kapljevine ( $\eta$  je dinamična viskoznost in  $\rho$  gostota kapljevine). Določite ali je v cevovodu laminaren ali turbolenten tok.

Določite tudi koeficient trenja  $\lambda$  v cevi; pri tem vam naj bo v pomoč izraz:

$$h = \lambda \frac{L v^2}{2 d g}. \quad (51)$$



Slika 17: Eksperimentalna priprava.

### Pregled meritev in rezultati

Simbol	Vrednost	Enota
$H$		m
$V$		m <sup>3</sup>
$t$		s
$h$		m
$L$		m
$d$		m
$q_v$		m <sup>3</sup> /s
$v$		m/s
$T$		°
$\nu_{15^\circ C}$	$11,094 \cdot 10^{-7}$	m <sup>2</sup> /s
$\nu_{20^\circ C}$	$9,7937 \cdot 10^{-7}$	m <sup>2</sup> /s
$\nu_{25^\circ C}$	$8,7137 \cdot 10^{-7}$	m <sup>2</sup> /s
$Re$		
Tip toka?	laminaren/turbolenten	
$\lambda$		

### 5.3 Iztočno število

Na sliki 18 je prikazana naprava za preučevanje iztočnih izgub. V zgornjo posodo nalijte vodo do višine  $h_1$ . Potem, ko odprete iztočno odprtino na dnu posode previdno dolivajte vodo, da boste ohranjali višino gladine. Po času  $t_1$  zaprite iztočno odprtino in izmerite iztečeni volumen  $V_1$ . Izračunajte povprečen pretok  $q_V$ .

Glede na *Torricellijevo enačbo* lahko izračunate teoretično iztočno hitrost<sup>2</sup>:

$$v_{1,\text{teor}} = \sqrt{2g h_1} \quad (52)$$

in nadalje teoretični pretok:

$$q_{V,\text{teor}} = A_g \sqrt{2g h_1} \quad (53)$$

kjer je  $A_g = \pi d^2/4$  geometrijski presek odprtine in  $d$  notranji premer iztočne odprtine.

Ker pa v realnosti na hitrost iztekanja vplivata tako hitrostni koeficient  $\varphi$ , kakor koeficient zožitve curka  $\alpha$ , je izmerjeni pretok mogoče definirati kot:

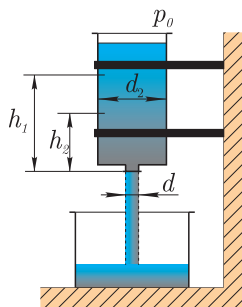
$$q_V = \alpha\varphi A_g \sqrt{2g h_1}, \quad (54)$$

kjer je eksperimentalna faktorja  $\alpha$  in  $\varphi$  ponavadi opišemo z iztočnim koeficientom  $\mu = \alpha\varphi$  (določite ga). Ker se s temperaturo viskoznost vode bistveno spreminja, ponovite eksperiment s  $\pm 10^\circ\text{C}$  spremenjeno temperaturo vode. Ali teoretični izrazi vključujejo vpliv viskoznosti?

Nadaljujete z eksperimentom, kjer vode ne dolivate, ampak pustite, da v času  $t_2$  odteče do višine  $h_2$ . Hitrost iztekanja se zaradi spreminjanja višine gladine spreminja in tok skozi odprtino ni stacionaren. V tem primeru velja izraz [5]:

$$t_2 = \frac{2 d_2^2}{d^2 \mu_s \sqrt{2g}} \left( \sqrt{h_1} - \sqrt{h_2} \right). \quad (55)$$

Določite iztočni koeficient  $\mu_s$ !



Slika 18: Eksperimentalna priprava.

<sup>2</sup>Upoštevamo, da je površina gladine bistveno večja kakor pa je presek iztočne odprtine.



**Pregled meritev in rezultati**

Simbol	Vrednost	Enota
$h_1$		m
$V_1$		m <sup>3</sup>
$t_1$		s
$q_V$		m <sup>3</sup> /s
$v_{1,\text{teor}}$		m/s
$d$		m
$A_g$		m <sup>2</sup>
$q_{V,\text{teor}}$		m <sup>3</sup> /s
$\mu$		
$\mu_{\pm 10^\circ \text{C}}$		
$h_2$		m
$d_2$		m
$t_2$		s
$\mu_s$		

## Literatura

- [1] KUHELJ A. ML.: *Mehanika, Dinamika*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1998
- [2] BOLTEŽAR M.: *Mehanska nihanja – 1.del, druga izdaja*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2010
- [3] MURŠIČ M.: *Osnove tehniške mehanike 3, Dinamika*, Akademska založba, Ljubljana, 1991
- [4] STROPNIK J.: *Mehanika- Laboratorijske vaje*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1985
- [5] STROPNIK J.: *Hidromehanika*, TZS Ljubljana, Ljubljana, 1999