1 KLASIČNA ANALIZA

1.1 Sistemska enačba

Analizo problema, torej izračun odziva vezja na dano vzbujanje, opravimo po naslednjem postopku: Po eni od metod, ki smo jih spoznali v prejšnjih poglavjih, postavimo enačbe vezja in dobimo sistem linearnih integro-diferencialnih enačb. Z izločanjem spremenljivk nato prevedemo sistem enačb v *sistemsko enačbo*, ki opisuje odnos med *vzbujanjem* in eno spremenljivko, ki predstavlja *odziv*. Splošno je sistemska enačba linearna nehomogena diferencialna enačba n-tega reda z realnimi konstantnimi koeficienti. V operatorskem zapisu izgleda takole:

$$\boxed{(a_n\mathrm{D}^n + a_{n-1}\mathrm{D}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{D} + a_0)y(t) = (b_m\mathrm{D}^m + b_{m-1}\mathrm{D}^{m-1} + \cdots + b_1\mathrm{D} + b_0)x(t)} \quad . \tag{1}$$

Iščemo odziv $y(t)$, ki je rešitev te diferencialne enačbe. Uporabimo običajen postopek reševanja nehomogene linearne diferencialne enačbe, ki ga opravimo v dveh korakih. Najprej rešimo pripadajočo *homogeno enačbo*, ki jo dobimo tako, da na desni strani sistemske enačbe postavimo $x(t) = 0$. Tej rešitvi nato prištejemo še *partikularno rešitev* sistemske enačbe, tako da je splošna rešitev

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t)} \quad , \tag{2}$$

kjer je z $y_h(t)$ označena rešitev homogene diferencialne enačbe, z $y_p(t)$ pa partikularna rešitev. Postopek, ko računamo odziv vezja z neposrednim reševanjem diferencialne enačbe, imenujemo *klasična analiza*. Značilnost take analize je, da računamo s časovnimi funkcijami ali kot pravimo, v *časovnem prostoru oziroma domeni*. Zato je mogoča enostavna elektrotehniška interpretacija rezultatov, saj ti predstavljajo električne spremenljivke, napetosti in toke, ki jih lahko sproti preverjamo. Vnaprej tudi vemo, kolikšen bo red diferencialne enačbe danega vezja: tolikšen, kot je število reaktivnih elementov v njem.
Pri redukciji sistema enačb nižjega reda (2 do 3) v sistemsko enačbo lahko uporabimo neposredno invertiranje matrike operatorjev oziroma Cramerjevo pravilo, pri višjih redih pa je primeren postopek Gaussova eliminacija, ki pretvori matriko operatorjev v trikotno oziroma diagonalno obliko.

1.1.1 Rešitev homogene diferencialne enačbe

Iščemo rešitev enačbe

$$(a_n\mathrm{D}^n + a_{n-1}\mathrm{D}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{D} + a_0)y(t) = 0 \quad . \tag{3}$$

Predpostavimo jo v obliki

$$y(t) = e^{pt} \tag{4}$$

in jo vstavimo v enačbo 3. Eksponentna funkcija se pri odvajanju ponavlja in jo izpostavimo,

$$(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0)e^{pt} = 0 \quad . \tag{5}$$

Enačba bo izpolnjena za vsak t, če zahtevamo

$$\boxed{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0 = 0} \quad . \tag{6}$$

To enačbo imenujemo *karakteristična enačba*; vsi njeni koreni rešijo v nastavku 4 enačbo 3. Prvi korak v iskanju rešitve homogene diferencialne enačbe je torej izračun korenov karakteristične enačbe. Ti pogojujejo nadaljni potek računa. Ločimo dve situaciji:

Različni koreni Vsi koreni karakteristične enačbe $p_1, p_2 \ldots p_n$ so med seboj različni. *Osnovne rešitve* enačbe 3 so tedaj

$$y_1(t) = e^{p_1 t}, y_2(t) = e^{p_2 t}, \ldots, y_n(t) = e^{p_n t} \quad . \tag{7}$$

Splošna rešitev homogene diferencialne enačbe je linearna kombinacija osnovnih,

$$\boxed{y_h(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \cdots + K_n e^{p_n t}} \quad , \tag{8}$$

kjer so konstante $K_1 \ldots K_n$ poljubne.

Večkratni koren Predpostavimo, da so koreni karakteristične enačbe enaki, v obliki j-kratne rešitve $p_1 = p_2 = \cdots = p_j$ Tedaj so osnovne rešitve homogene diferencialne enačbe 3

$$y_1(t) = e^{p_1 t}, y_2(t) = t e^{p_1 t}, \ldots, y_j(t) = t^{j-1} e^{p_1 t} \quad . \tag{9}$$

Splošna rešitev je spet kombinacija osnovnih, tokrat v obliki

$$\boxed{y_h(t) = (K_1 + K_2 t + \cdots + K_j t^{j-1}) e^{p_1 t}} \quad , \tag{10}$$

kjer so konstante $K_1 \ldots K_j$ poljubne. V kolikor je večkratnih korenov več, vsakemu pripada rešitev, ki jo poiščemo na tak način.

Splošna rešitev homogene diferencialne enačbe 3 je torej glede na korene karakteristične enačbe v obliki 8 ali (in) 10.
Koeficienti diferencialne enačbe so realne konstante, zato se morebitni kompleksni koreni pojavljajo v konjugiranih parih. Eksponentna člena, ki pripadata takemu konjugiranemu paru, običajno združimo. Vzemimo, da sta korena karakteristične enačbe

$$p_1 = \delta + j\omega \quad \text{in} \quad p_2 = \delta - j\omega \quad . \tag{11}$$

Osnovni kompleksni eksponentni rešitvi skupaj vedno predstavljata realno funkcijo, saj velja,

$$K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} = A e^{\delta t} \cos(\omega t) + B e^{\delta t} \sin(\omega t) \quad , \tag{12}$$

kjer sta A in B spet realni konstanti. Elektrotehniki pa to rešitev praviloma zapišemo drugače. Konstantama K_1 in K_2 pripišemo konjugirani vrednosti in ju izrazimo v eksponentni obliki kot

$$K_1 = \frac{K}{2} e^{j\varphi} = K_2^* \quad , \tag{13}$$

in spet dobimo realno funkcijo

$$\boxed{K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} = K e^{\delta t} \cos(\omega t + \varphi)} \quad , \tag{14}$$

Na ta način poudarimo, da konjugirana korena skupaj določata realno časovno funkcijo, ki opisuje tok ali napetost v vezju. Tak potek imenujemo *dušeno nihanje*. Elektrotehniški parametri signala so v takem zapisu neposredno razvidni.

1.1.2 Partikularna rešitev

Za računanje partikularne rešitve sistemske diferencialne enačbe lahko uporabimo metodo *variacije konstant* ali pa *metodo nedoločenih koeficientov*, ki je za analizo vezij še posebej primerna. To drugo si zato podrobneje oglejmo. Iščemo partikularno rešitev sistemske enačbe

$$(a_n \mathrm{D}^n + a_{n-1} \mathrm{D}^{n-1} + \cdots + a_1 \mathrm{D} + a_0) y(t) = F(t) \tag{15}$$

in jo predpostavimo v obliki

$$\boxed{y_p(t) = K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t) + \cdots + K_k f_k(t)} \quad , \tag{16}$$

kjer $f_i(t)$ predstavljajo posamezne člene funkcije $F(t)$ na desni strani sistemske enačbe 1 in vse njihove odvode. V splošnem je zato lahko v takem nastavku zelo veliko členov. V problemih iz električnih vezij pa ima funkcija $F(t)$ navadno enostavno obliko in predvsem malo različnih odvodov. Nastavek vstavimo v enačbo 15 in z izenačevanjem podobnih členov na levi in desni strani enačbe izračunamo vrednosti konstant K_i

Nastavek v obliki 16 pa lahko uporabimo le, če $F(t)$ ne vsebuje členov, ki predstavljajo tudi osnovne rešitve pripadajoče homogene enačbe. Vzemimo, da je tak člen $u(t)$ in da predstavlja s-kratni koren karakteristične enačbe. V tem primeru moramo nastavek, ki pripada temu členu, pomnožiti s t^s. Če pa $F(t)$ vsebuje člen $t^k u(t)$, pripadajoči del nastavka pomnožimo s t^{s+k}.

Ker so v večini diferencialnih enačb, ki opisujejo elementarna električna vezja, funkcije $F(t)$ preproste z malo ali ponavljajočimi se odvodi, je tako računanje partikularne rešitve enostavno in učinkovito. Najznačilnejši primeri so zajeti kar v naslednjih preglednicah:

$F(t)$	$y_p(t)$
K	A
$Ke^{\delta t}$	$Ae^{\delta t}$
$K\cos(\omega t)$	$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$
$Ke^{\delta t}\cos(\omega t)$	$Ae^{\delta t}\cos(\omega t) + Be^{\delta t}\sin(\omega t)$
$K_2 t^2 + K_1 t + K_0$	$At^2 + Bt + C$

Tabela 1: Nastavki za partikularno rešitev, ko $F(t)$ ni tudi rešitev homogene enačbe

$F(t)$	$y_p(t)$	Koren karakt. enačbe je tudi
K	tA	$p_i = 0$
$Ke^{\delta t}$	$tAe^{\delta t}$	$p_i = \delta$
$K\cos(\omega t)$	$t(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$	$p_{i,j} = \pm j\omega$
$Ke^{\delta t}\cos(\omega t)$	$t(Ae^{\delta t}\cos(\omega t) + Be^{\delta t}\sin(\omega t))$	$p_{i,j} = \delta \pm j\omega$
$K_2t^2 + K_1t + K_0$	$t^3(At^2 + Bt + C)$	$p_{i,j,k} = 0$

Tabela 2: Nastavki za partikularno rešitev, ko je $F(t)$ tudi rešitev homogene enačbe, ki pripada navedenemu korenu.

1.1.3 Posebna rešitev

Splošna rešitev nehomogene diferencialne enačbe n-tega reda vsebuje n konstant. Vrednosti jim pripišemo glede na začetno stanje v vezju. Začetno stanje določa energija, ki je pred sprožitvijo odziva nakopičena v reaktivnih elementih. Tako iz družine funkcij, ki jo predstavlja splošna rešitev, izberemo tisto, ki natančno ustreza izbranemu vezju. Imenujemo jo *posebna rešitev.* To je rešitev, ki jo imamo v mislih pri reševanju konkretnega problema.
Odziv na dano vzbujanje popolnoma določata sistemska enačba in začetno stanje vezja.
Za izračun n konstant $K_1 \ldots K_n$ potrebujemo n enačb. Dobimo jih tako, da splošno rešitev zaporedoma $n-1$ krat odvajamo in v tako dobljenih enačbah postavimo $t = 0$, torej

$$\begin{aligned} y(0) &= y_h(0) + y_p(0) \\ y^{'}(0) &= y_h^{'}(0) + y_p^{'}(0) \\ \vdots &= \vdots \\ y^{(n-1)}(0) &= y_h^{(n-1)}(0) + y_p^{(n-1)}(0) \quad , \end{aligned} \tag{17}$$

kjer so iskane konstante vsebovane v rešitvi homogene diferencialne enačbe in njenih odvodih. Za razrešitev tega sistema enačb potrebujemo podatke o odzivu in njegovih $n-1$ odvodih v trenutku $t = 0$. Te podatke,

$$y(0), y^{'}(0), \ldots, y^{n-1}(0) \tag{18}$$

imenujemo *začetne vrednosti odziva* in v splošnem niso neposredno razvidni iz podatkov o vezju, saj odziv šele računamo. Zato jih moramo izračunati. Na razpolago pa so *začetna stanja* vseh reaktivnih elementov tik pred sprožitvijo odziva,

$$u_{Ci}(0^-), i_{Li}(0^-) \quad .$$

Zaradi zveznosti napetosti na kondenzatorjih in tokov skozi tuljave pa pri omejenem toku velja za vsak kondenzator v vezju

$$u_{Ci}(0^+) = u_{Ci}(0^-) \tag{19}$$

in za vsako tuljavo pri omejeni napetosti prav tako

$$u_{Li}(0^+) = u_{Li}(0^-) \quad . \tag{20}$$

Z upoštevanjem teh podatkov, torej stanj $u_{Ci}(0^+)$ in $i_{Li}(0^+)$, lahko iz sistema enačb, ki vezje opisuje za trenutek $t = 0^+$ (v nadaljevanju preprosto $t = 0$), izračunamo začetne vrednosti odziva 18 in nato razrešimo sistem enačb 17in tako ugotovimo vrednosti konstant $K_1 \ldots K_n$.
Za izračun odziva torej ni dovolj, da poznamo zgradbo vezja, ki se zrcali v njegovi sistemski diferencialni enačbi, ampak moramo poznati tudi njegovo začetno stanje.

1.2 Interpretacija rešitve

1.2.1 Lastni in vsiljeni odziv

Splošna rešitev je sestavljena iz dveh delov, iz rešitve pripadajoče homogene enačbe in partikularne rešitve. Iz nehomogene enačbe dobimo homogeno tako, da postavimo $F(t) = 0$, kar pomeni, da na rešitev vpliva le struktura vezja in njegovo začetno stanje, ne pa vzbujanje. Odziv poganja samo lastna (od prej nakopičena) energija vezja. Zato rešitev homogene enačbe imenujemo tudi *lastni odziv*.
Partikularna rešitev reši nehomogeno enačbo in je prav tako odvisna od strukture vezja. Močno pa je odvisna tudi od funkcije $F(t)$, ki vsebuje vzbujanje. Ta del odziva se pojavi le ob vzbujanju, vezju ga vsilimo, zato se imenuje *vsiljeni odziv*.
Komponente splošne rešitve torej lahko poimenujemo bolj elektrotehniško:
Splošni odziv je sestavljen iz lastnega in vsiljenega odziva.

1.2.2 Odziv na začetno stanje in odziv na vzbujanje

Splošna rešitev vsebuje n konstant. Ko tem konstantam pripišemo konkretne vrednosti, priredimo splošni odziv izbranemu vezju, kjer upoštevamo tudi začetno stanje. To rešitev imenujemo *posebna rešitev* ali *posebni odziv*. Medtem ko splošni odziv ustreza neskončni množici vezij z enako zgradbo, a različnimi začetnimi stanji, se posebni odziv nanaša na obravnavano vezje s popolnoma določenimi začetnimi vrednostmi. To je šele tisti odziv, ki ga iščemo, zato bomo v nadaljevanju z odzivom imeli v mislih posebni odziv vezja. Tudi tega lahko formalno razdelimo na dva značilna dela. Prvi del vsebuje tiste člene, ki so odvisni od začetnega stanja vezja; imenujemo ga *odziv na začetno stanje* $y_z(t)$. Drugi del vsebuje člene, ki so posledica vzbujanja, imenujemo ga *odziv na vzbujanje* $y_v(t)$. Posebni odziv lahko zapišemo v dveh delih,

$$\boxed{y(t) = y_z(t) + y_v(t)} \quad . \tag{21}$$

1.2.3 Prehodni pojav in stacionarno stanje

Formalna delitev členov v rešitvi za posebni odziv pa je lahko tudi drugačna: člene grupiramo glede na časovni potek. Tedaj v prvi del združimo tiste, ki s časom izzvenijo, v drugi del pa tiste, ki ostanejo. Prvi del imenujemo *prehodni pojav* $y_0(t)$, drugi del pa *stacionarno stanje* $y_s(t)$. Prehodni pojav je posledica spremembe v vezju in prestavlja prehod iz enega v drugo stacionarno stanje. To pa določa vzbujanje in mu je tudi po obliki podobno. Posebni odziv torej lahko zapišemo tudi kot vsoto

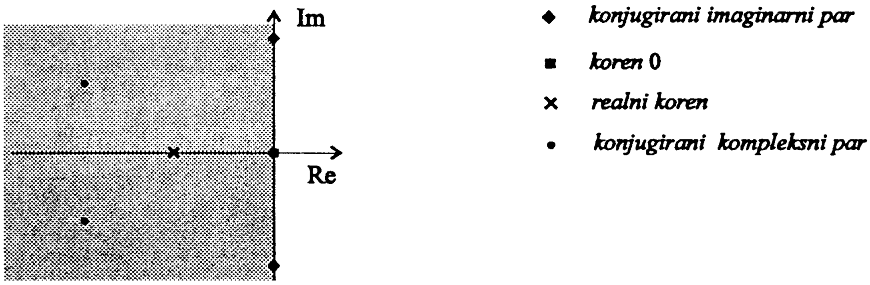
$$\boxed{y(t) = y_0(t) + y_s(t)} \quad . \tag{22}$$

1.2.4 Tipi lastnega odziva

V nadaljevanju si podrobneje oglejmo korene karakteristične enačbe. Ti so odvisni od zgradbe vezja in vrednosti elementov in določajo značaj lastnega odziva. Njihove vrednosti ponazarjamo v kompleksni ravnini.
Lastni odziv pasivnega vezja je posledica sprostitve nakopičene energije, ki je vedno končna. Zato noben člen lastnega odziva ne more pri $t \to \infty$ absolutno naraščati, v sistemu nakopičene energija se s časom lahko le zmanjšuje. Samo v idealiziranem primeru, ko je sistem brezizguben (vezja LC), ostaja energija sistema nespremenjena in se le pretaka po vezju. Zato velja:
Pasivna vezja imajo vse korene karakteristične enačbe na zaprti levi strani kompleksne ravnine.

$$Re[p_i] \leq 0 \quad . \tag{23}$$

Variante korenov karakteristične enačbe pasivnih vezij so prikazane na sliki 1.

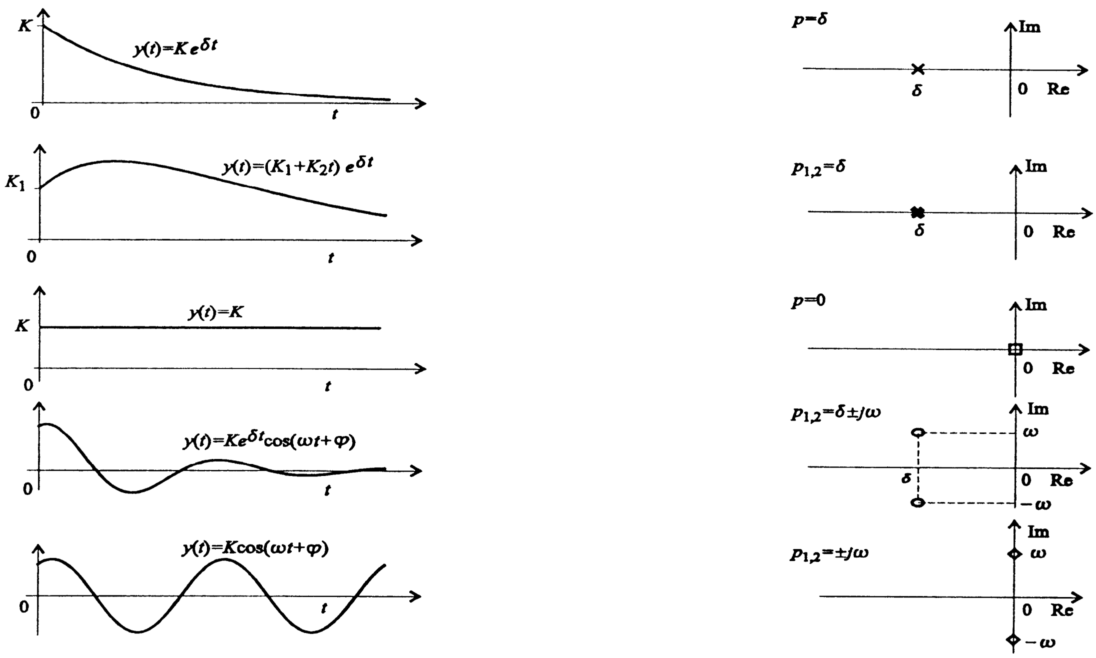


Slika 1: Variante korenov karakteristične enačbe pasivnih vezij v kompleksni ravnini.

Imaginarna os je rezervirana za idealizirana vezja, ki ne porabljajo energije; taka so LC ali *reaktančna vezja.* Ta so lahko le izjemoma za nekatere izračune dober model realnih vezij, na primer za računanje resonančne frekvence nihajnih krogov. Splošno pa koreni karakteristične enačbe pasivnih vezij ležijo levo od imaginarne osi. Vpliv korenov karakteristične enačbe na lastni odziv vidimo na sliki 2. Če vsi koreni karakteristične enačbe ležе na levi odprti kompleksni polravnini in vsiljeni odziv s časom ne izzveni, je stacionarno stanje enako vsiljenemu odzivu oziroma partikularni funkciji, torej

$$y_s(t) = y_p(t) \quad . \tag{24}$$

Na osnovi te ugotovitve se lahko izognemo računanju partikularne funkcije. Tako znamo na primer enosmerno ali izmenično stacionarno stanje enostavno izračunati posebej z enosmerno ali izmenično analizo in iskanje partikularne rešitve diferencialne enačbe ni potrebno.



Slika 2: Lastni odzivi pasivnih vezij glede na vrednosti korenov karakteristične enačbe.

Literatura:

Jože Mlakar: LINEARNA VEZJA IN SIGNALI, Založba FE in FRI, Ljubljana, 2002