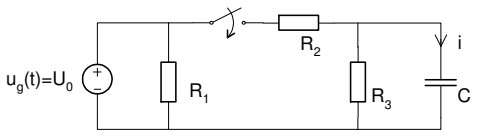
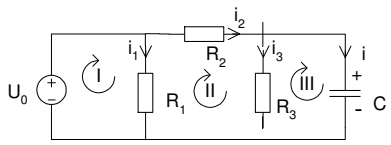
Z reševanjem diferencialne enačbe izračunaj in skiciraj tok i po vklopu stikala. Napetost kondenzatorja v času $t = 0s$ je enaka $10V$, $U_0 = 15V$, $R_1 = R_2 = R_3 = 1\Omega$, $C = 10\mu F$.



Rešitev: Diferencialno enačbo rešujemo za $t > 0$. Odločimo se za zančno metodo.



Za $i = I_3$ dobimo enačbe

$$\begin{aligned}
(I): &\quad -U_0 + R_1(I_1 - I_2) = 0,\\
(II): &\quad R_1(I_2 - I_1) + R_2 I_2 + R_3(I_2 - I_3) = 0,\\
(III): &\quad R_3(I_3 - I_2) + \frac{1}{CD} I_3 = 0.
\end{aligned}$$

Iz prve enačbe izrazimo tok I_1, ga vstavimo v drugo enačbo in dobimo $I_2 = \frac{U_0 + R_3 I_3}{R_2 + R_3}$. Dobljeno vstavimo v tretjo enačbo in upoštevamo $i = I_3$, kar da

$$Di(t) + Ai(t) = 0, \qquad A = \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3 C} = 2 \cdot 10^5 s^{-1}.$$

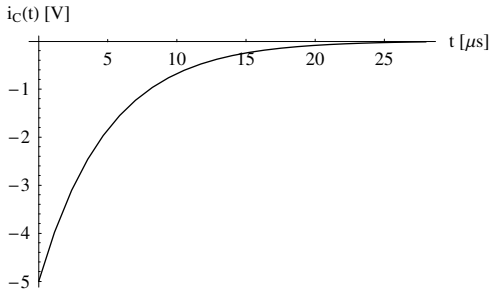
To je homogena diferencialna enačba, katere splošna rešitev je $i(t) = Ke^{-At}$.

Poiščimo začetni pogoj $i(0)$ za $t = 0$. Tedaj je napetost kondenzatorja enaka $10V$ in velja $i_2(0) = i_3(0) + i(0) = \frac{u_C(0)}{R_3} + i(0) = \frac{U_0 - u_C(0)}{R_2}$. (glej oznake na pomožni sliki). Zato velja $i(0) = \frac{U_0 - u_C(0)}{R_2} - \frac{u_C(0)}{R_3} = 5A - 10A = -5A$.

Dobljeni začetni pogoj vstavimo v splošno rešitev in dobimo $i(0) = K = -5A$ in s tem končno rešitev

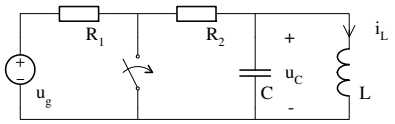
$$i(t) = -5e^{-2 \cdot 10^5 t} A.$$

Potek toka je enak


$i_C(t)$ [V]
t [μs]
5
10
15
20
25
−1
−2
−3
−4
−5

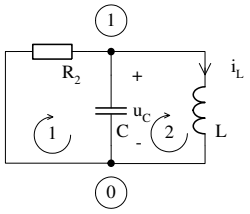
□

Določite in skicirajte potek toka skozi tuljavo. Vrednosti elementov so $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $C = \frac{3}{8}mF$, $L = 0.8H$, napetost $u_g = 10V$.



Rešitev:

- Izbira neznane funkcije: Ker pričakujemo DE 2. reda, najprej izračunamo dva začetna pogoja v $t_0 = 0s$ in s tem izberemo primerno neznano funkcijo. Kandidata za neznano funkcijo sta $i_L(t)$ in $u_L(t)$. Za izbrano funkcijo potrebujemo njeno vrednost in njen odvod v $t_0 = 0s$.
  - $i_L(t)$: Pred preklopom stikala je tok tuljave konstanten in zato je napetost na kndenzatorju in od tod tudi na tuljavi enaka 0. Ker je tok kondenzatorja enak $0A$ (odvod konstantne napetosti), je $i_L(0^-) = i_L(0) = \frac{u_g}{R_1+R_2}$ (tok tuljave je zvezen). Odvod toka tuljave v $t = 0$ je $Di_L(t) = \frac{1}{L}u_L(0) = \frac{1}{L}u_C(0) = 0$.
    Ker smo uspeli izračunati oba začetna pogoja, za neznano funkcijo izberemo $i_L(t)$.
- Zapis DE:
  Odločimo se za zančno metodo. Po sklenitvi stikala ima vezje obliko



  Zančne enačbe so

$$(1): \qquad R_2 I_1 + \frac{1}{CD}(I_1 - I_2) = 0,$$
$$(2): \qquad \frac{1}{CD}(I_2 - I_1) + LDI_2 = 0.$$

  Iskani tok je $i_L = I_2$.
  Enačbi seštejemo, izrazimo tok I_1 in ga vstavimo v drugo enačbo, ki smo jo prej množili CD. Enačbo preuredimo in dobimo

$$LR_2CD^2 i_L + LDi_L + R_2 i_L = 0.$$

- Splošna rešitev DE:

– Homogena: Karakteristični polinom DE je $p(\alpha) = LR_2C\alpha^2 + L\alpha + R_2$, njegovi ničli sta realni

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{-L + \sqrt{L^2 - 4R_2^2LC}}{2R_2LC} = -100s^{-1},\\ \alpha_2 &= \frac{-L - \sqrt{L^2 - 4R_2^2LC}}{2R_2LC} = -\frac{100}{3}s^{-1}.\end{aligned}$$

Homogeni del rešitve je enak

$$i_h(t) = K_1e^{-100t} + K_2e^{-\frac{100}{3}t}.$$

– Partikularni del:

Ker je enačba homogena, je njen partikularni del enak nič, $i_p(t) = 0A$.

S tem je splošna rešitev DE znana,

$$i_L(t) = i_h(t) = K_1e^{-100t} + K_2e^{-\frac{100}{3}t}.$$

- Posebna rešitev:

Začetna pogoja $i_L(0) = \frac{u_g}{R_1+R_2} = \frac{1}{3}A$ in $Di_L(0) = 0$ smo izračunali že ob izbiri neznane funkcije. Izračunamo odvod splošne rešitve $Di_L(t) = -100K_1e^{-100t} - \frac{100}{3}K_2e^{-\frac{100}{3}t}$, vstavimo začetne pogoje in dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned}K_1 + K_2 &= = \frac{1}{3}A,\\ -100K_1 - \frac{100}{3}K_2 &= 0.\end{aligned}$$

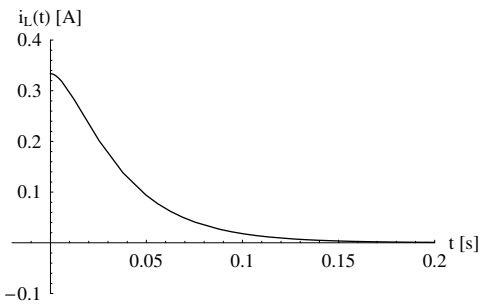
Njegova rešitev je

$$K_1 = -\frac{1}{6}, \qquad K_2 = \frac{1}{2}.$$

S tem je tok tuljave določen,

$$i_L(t) = \frac{1}{6}\left(3e^{-\frac{100}{3}t} - e^{-100t}\right).$$

Graf odziva je prikazan na sliki.



□