

FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika I

Pisni izpit

7. februar, 1996

Ime in priimek: _____ *Letnik:* _____

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 8, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri in pol (150 min).

Naloga	a.	b.	Skupaj
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
Skupaj			

1. (20) Zaporedje realnih števil x_1, x_2, \dots je podano z rekurzijsko formulo

$$x_1 = 2 \quad \text{in} \quad x_{n+1} = (e - 1) \log(x_n) + 1.$$

- a. (10) Dokažite z matematično indukcijo, da je $1 \leq x_n \leq e$ za vse $n \geq 1$.

Namig: $0 \leq \log(x) \leq 1$ in $(e - 1) \log(x) > x - 1$ za $1 \leq x \leq e$.

- b. (10) Privzemite, da je $1 < x_n \leq e$ za vse $n \geq 1$. Dokažite, da zaporedje x_1, x_2, \dots ima limito in jo izračunajte.

Namig: $(e - 1) \log(x) > x - 1$ za $1 \leq x \leq e$.

2. (20) Limiti, L'Hospitalovo pravilo:

a. (10)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{\cos 3x - 2 \cos 2x + \cos x} =$$

b. (10)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + \sinh(x) - 2x}{x^5} =$$

3. (20) Odvodi, inverzne funkcije:

a. (10) Izračunajte odvod funkcije

$$F(x) = \arcsin(\cos(x))$$

za $0 < x < \pi$. Kaj vam odvod pove o funkciji F ?

b. (10) Izračunajte odvod funkcije $F(x) = \operatorname{ctg}(\arcsin(x))$ za $0 < x < \pi$. Primerjajte odvod $F'(x)$ z odvodom funkcije $g(x) = \sqrt{1-x^2}/x$. Kaj lahko ugotovite?

4. (20) Naj bo $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

a. (10) Zapišite Taylorjev polinom $2n + 1$ -te stopnje v točki $x_0 = 0$ za funkcijo f .

Namig: Upoštevajte, da je Taylorjev polinom $2n$ -te stopnje za funkcijo

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{enak} \quad T_{2n}(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{-1/2}{k} x^{2k}.$$

b. (10) Izračunajte $f^{(5)}(0)$. Rezultat mora biti številka, ne izraz.

- 5.** (20) Predpisano imamo, da mora biti prostornina škatle enaka V , tloris pa kvadratast.
- a.** (10) Med vsemi škatlami, ki ustrezajo zgornjemu predpisu, najdete tisto z najmanjšo površino. Dokažite, da ste našli minimum.
- b.** (10) Predpostavite, da mora biti zdaj površina škatle predpisana in enaka P , tloris pa kvadratast kot prej. Kakšna je škatla, ki ustreza pogojem in ima največjo možno prostornino.

6. (20) Uvedba nove spremenljivke, racionalne funkcije:

a. (10) Z uvedbo nove spremenljivke izračunajte integral

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos(x) \sin(x)} =$$

b. (10) Pokažite, da je

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(x)}}{\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos(x)}}{\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)}} dx.$$

Namig: $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$.

7. (20) Integracija per partes, racionalne funkcije.

a. (10) Dokažite z integracijo per partes, da je za celi števili $m, n \geq 2$

$$\int_0^\pi \sin^m(x) \cos^n(x) dx = \frac{n-1}{m+1} \int_0^\pi \sin^{m+2}(x) \cos^{n-2}(x) dx.$$

Namig: $\cos^n(x) = \cos(x) \cos^{n-1}(x)$.

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_0^1 \frac{3x-3}{1+x^3} dx =$$

8. (20) Funkciji f in g naj bosta podani z

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{in} \quad g(x) = 1 - e^{-|x|}.$$

a. (10) Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij f in g na $[-\log(2), \log(2)]$.

b. (10) Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta graf funkcije f in premica $y = 1$ na $[0, \log(a)]$.