FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1 & 2

Pisni izpit

9. februar 1999

Ime in priimek: ________________________________ **Letnik:** ____________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri in pol (150 min).

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $g(y)$ naj bo na intervalu $[0, \infty)$ definirana z

$$g(y) = \frac{1}{a}((y+a)^{3/2} - y^{3/2}) .$$

Naj bo $f(x)$ inverzna funkcija funkcije $g(y)$ definirana na intervalu $[\sqrt{a}, \infty)$.

a. (10) Izračunajte $f'(\sqrt{a})$.

Rešitev: Po formuli za odvajanje inverzne funkcije je

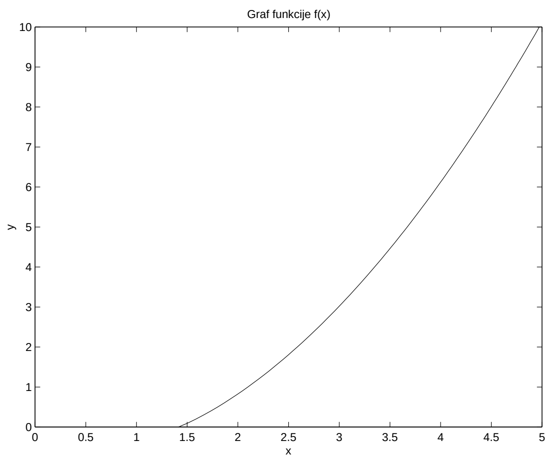
$$f'(\sqrt{a}) = \frac{1}{g'(f(\sqrt{a}))} .$$

Izračunamo, da je $g(0) = \sqrt{a}$, torej je $f(\sqrt{a}) = 0$. Izračunamo še

$$g'(y) = \frac{3}{2a}((y+a)^{1/2} - y^{1/2}) ,$$

iz česar sledi $g'(0) = 2/(3\sqrt{a})$.

Graf funkcije $f(x)$ je na spodnji sliki:



Sl. 1 Graf f(x)

Ocenjevanje:

- *Uporaba formule za odvod inverzne funkcije: 2 točki.*
- *Pravilna točka: 2 točki.*
- *Pravilno vstavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 4 točke.*

b. (10) Pokažite, da velja

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{a + f(x)}\right)$$

za $x \in [\sqrt{a}, \infty)$.

Rešitev: Uporabimo spet formulo za odvajanje inverzne funkcije.

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} .$$

V a. smo že izračunali $g'(y) = \frac{3}{2a}((y+a)^{1/2} - y^{1/2})$*, iz česar sledi*

$$f'(x) = \frac{2a}{3((f(x)+a)^{1/2} - f(x)^{1/2})} .$$

Množimo še števec in imenovalec na desni z $(f(x)+a)^{1/2} + f(x)^{1/2}$ *in dobimo*

$$f'(x) = \frac{2}{3}\left((f(x)+a)^{1/2} + f(x)^{1/2}\right) ,$$

kar je bilo treba pokazati.

Ocenjevanje:

- *Uporaba formule za odvod: 3 točke.*
- *Odvajanje* $g(y)$*: 2 točki.*
- *Pravilno vstavljanje: 3 točke.*
- *Ideja z množenjem: 2 točki.*

2. (20) Integriranje:

a. (10) Naj bo $k \neq 0$ celo število. Izračunajte

$$I = \int_0^1 (\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}) \cos(2\pi k x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Rešitev: Integriramo per partes.

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sin(2\pi k x)}{2\pi k} (\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12})\Big|_0^1 - \frac{1}{2\pi k} \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) \sin(2\pi k x) \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\cos(2\pi k x)}{4\pi^2 k^2} (x - \frac{1}{2})\Big|_0^1 + \frac{1}{4\pi^2 k^2} \int_0^1 \cos(2\pi k x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4\pi^2 k^2} \, . \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prvo integriranje per partes: 3 točke.*
- *Drugo integriranje per partes: 3 točke.*
- *Rezultat: 4 točke.*

b. (10) Za $a > 0$ izračunajte izlimitirani integral

$$\int_0^1 \frac{a^2(1-x)}{x^3} \cdot e^{-\frac{a}{x}} \, \mathrm{d}x \, .$$

Rešitev: Najprej uvedemo novo spremenljivko $u = a/x$ *in izračunamo* $\mathrm{d}u = -(a/x^2)\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{a^2(1-x)}{x^3} \cdot e^{-\frac{a}{x}} \, \mathrm{d}x &= \int_a^\infty \frac{a(1-a/u)}{a/u} e^{-u} \, \mathrm{d}u \\ &= \int_a^\infty (u-a) e^{-u} \, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty v e^{-(a+v)} \, \mathrm{d}v \qquad u - a = v \\ &= e^{-a} (-v e^{-v}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-v} \, \mathrm{d}v) \\ &= e^{-a} \, . \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prva nova spremenljivka: 3 točke.*
- *Sprememba mej: 3 točke.*
- *Druga nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Per partes in rezultat: 2 točki.*

3. (20) Označite:

h nadmorska višina.

$\rho(h)$ gosotota zraka na višini h.

$p(h)$ Zračni tlak na višini h.

$t(h)$ Temperatura na višini h.

Za količini ρ in h velja zveza

$$p'(h) = -g\rho(h) \qquad (*)$$

a. (10) Privzemite, da je $p = k\rho^\gamma$ za primerni konstanti k in $\gamma \neq 1$. Izračunajte zračni tlak $p(h)$, če je $p(0) = p_0$.

Rešitev: Iz enačbe $(*)$ sledi, da za funkcijo p velja diferencialna enačba

$$p' = -g\left(\frac{p}{k}\right)^{1/\gamma}.$$

Z integriranjem dobimo

$$\frac{\gamma p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\gamma-1} = -g(\frac{1}{k})^{1/\gamma}\cdot h + c\,.$$

Konstanto c določimo iz začetnega pogoja. Pri $h = 0$ mora veljati

$$\frac{\gamma p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\gamma-1} = c\,.$$

Končna rešitev je

$$p(h) = \left[-\frac{\gamma-1}{\gamma}\cdot g\cdot(\frac{1}{k})^{1/\gamma}\cdot h + p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Ocenjevanje:

- *Izpeljava diferencialne enačbe: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Določanje konstante: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 4 točke.*

b. (10) Privzemite, da je temperatura konstantno $T(h) = T_0$ in velja Van der Waalsova enačba

$$\frac{p + a\rho^2}{1/\rho - b} = RT_0$$

za konstante a, b in R. Pokažite, da velja

$$-g\rho = -RT_0\frac{\rho'}{\rho^2} - 2a\rho\rho'$$

in izpeljite, da pri začetnemu pogoju $\rho(0) = \rho_0$ velja

$$g\cdot h = RT_0(\frac{1}{2\rho_0^2} - \frac{1}{2\rho^2}) + 2a(\rho - \rho_0)\,.$$

Rešitev: Iz Van der Waalsove enačbe najprej izrazimo p:

$$p = RT_0(\frac{1}{\rho} - b) - a\rho^2 \,.$$

Obe strani enačbe odvajamo in dobimo

$$p' = -RT_0 \cdot \frac{\rho'}{\rho^2} - 2a\rho\rho' \,.$$

Če nadomestimo p' z $-g\rho$ dobimo željeno enačbo. Za drugi del obe strani te zadnje enačbe delimo z $-\rho$ in integriramo. Dobimo

$$g \cdot h + c = -\frac{RT_0}{2\rho^2} + 2a\rho \,.$$

Konstanto c določimo iz začetnega pogoja. Za $h = 0$ mora biti

$$c = -\frac{RT_0}{2\rho_0^2} + 2a\rho_0 \,.$$

Z nekaj preurejanja členov dobimo želeno zvezo.

Ocenjevanje:

- *Izpeljava diferencialne enačbe: 2 točki.*
- *Ločitev spremenljivk: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Določanje konstante: 2 točki.*
- *Končna zveza: 2 točki.*

4. (20) Naj bosta dana vektorja

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Izračunajte $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ in $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Rešitev: Po formuli je

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mešani produkt $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ *je enak kvadratu norme* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$*, torej* 18.

Ocenjevanje:

- *Izračun vektorskega produkta: 5 točk.*
- *Izračun mešanega produkta: 5 točk.*

b. (10) Poiščite vektor $\mathbf{c}$ dolžine $2\sqrt{2}$, ki je pravokoten na $\mathbf{a}$, oklepa s vektorjem $\mathbf{b}$ kot $\pi/6$ in zadošča pogoju $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$.

Namig: Vektorji $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *in* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *so baza.*

Rešitev: Po namigu je

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{b} + \mu(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Ker je kot med $\mathbf{c}$ *in* $\mathbf{b}$ *enak* $\pi/6$*, mora biti skalarni produkt*

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}, \mathbf{b}) &= |\mathbf{c}||\mathbf{b}|\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{6}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 6 \\ &= (\lambda\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 6\lambda \end{aligned}$$

Torej je $\lambda = 1$*. Po drugi strani mora biti*

$$|\mathbf{c}|^2 = \lambda^2|\mathbf{b}|^2 + \mu^2|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2,$$

torej

$$8 = 6 + 18\mu^2$$

ali $\mu = \pm\frac{1}{3}$*. Ker je* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mu\mathbf{a} \times \mathbf{b}) > 0$*, je torej* $\mu|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 > 0$*, torej* $\mu > 0$*. Vektor* $\mathbf{c}$ *je enak*

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev, zakaj je* $\mathbf{c}$ *linearna kombinacija kot v namigu: 2 točki.*
- *Določitev* λ*: 3 točke.*
- *Določitev* μ*: 3 točke.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

5. (20) Matrika $\mathbf{X}(2 \times 2)$ ustreza enačbi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} - \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Poiščite matriko $\mathbf{X}$.

Namig: Zapišite $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ *in prepišite zgornjo enačbo s temi oznakami.*

Rešitev: Če zmnožimo matrike na levi dobimo

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 & x_1 + x_2 + x_4 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 & 2x_2 + x_3 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gre torej za sistem 4 linearnih enačb s 4 neznankami. Zapišimo sistem v matrični obliki in uporabimo Gaussov postopek.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Preberemo $x_4 = 1/2$, $x_3 = -1/2$, $x_2 = -1/2$ *in* $x_1 = 1$.

Ocenjevanje:

- *Množenje matrik: 2 točki.*
- *Prepis v linearni sistem: 2 točki.*
- *Gaussov postopek: 4 točke.*
- *Rezlutat: 2 točki.*

b. (10) Je zgornja enačba rešljiva, če na desni strani namesto matrike $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ napišemo poljubno matriko $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$?

Rešitev: Je. Iz a. vidimo, da rang razširjene matrike ni nikoli večji od ranga matrike linearnega sistema.

Ocenjevanje:

- *Ideja z rangi: 5 točk.*
- *Smiselno formuliran odgovor: 5 točk.*

6. (20) Matrika $\mathbf{A}$ naj bo dana z

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

kjer velja $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$.

a. (10) Poiščite lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $\mathbf{A}$.

Rešitev: Najprej izračunamo karakteristični polinom

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -a_3 & a_2 \\ a_3 & -\lambda & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\,.$$

Edina realna lastna vrednost je $\lambda = 0$. Pripadajoči lastni vektor mora rešiti enačbo $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$. Izberimo si $x_3 = a_3$. Iz prve enačbe sledi $x_2 = a_2$ in iz tretje potem, da je $x_1 = a_1$.

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 3 točke.*
- *Lastne vrednosti: 3 točke.*
- *Enačbe sa lastni vektor: 2 točki.*
- *Lastni vektor: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{Q}$ matrika, ki opisuje zasuk v prostoru. Vemo, da velja $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ in $\det(\mathbf{Q}) = 1$. Matrika $\mathbf{A} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T$ je oblike kot v a. Pokažite, da je vsak lastni vektor $\mathbf{Q}$ tudi lastni vektor $\mathbf{A}$. Sklepajte, da je vektor $\mathbf{q} = (q_{32} - q_{23}, q_{13} - q_{31}, q_{21} - q_{12})$ os zasuka.

Rešitev: Naj bo $\mathbf{x}$ lastni vektor matrike $\mathbf{Q}$. Vemo, da pripada lastni vrednosti $\lambda = 1$. Če enačbo $\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pomnožimo z $\mathbf{Q}^T$ na obeh straneh dobimo $\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T\mathbf{x}$, iz česar sledi

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{Q}^T\mathbf{x} = 0\,.$$

Vektor $\mathbf{x}$ je lastni vektor matrike $\mathbf{A}$. Po a. lahko lastni vektor matrike $\mathbf{A}$ kar "preberemo" in dobimo $\mathbf{q}$.

Ocenjevanje:

- *Ideja, da je $\mathbf{x}$ tudi lastni vektor $\mathbf{Q}^T$: 4 točke.*
- *Sklep, da je lastni vektor $\mathbf{A}$ potem os: 3 točke.*
- *"Prebiranje" lastnega vektorja: 3 točke.*