FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

Pisni izpit

2. februar 2001

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Limite zaporedij in funkcij.

a. (10) Po Eulerju je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$. Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n .$$

Rešitev: Opazimo, da je

$$\left(1-\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{y}{n}\right)^n .$$

Iskana limita je $e^{-x}e^{-y}$.

Ocenjevanje:

- *Razcep: 2 točki.*
- *Limita prvega člena: 2 točki.*
- *Limita drugega člena: 2 točki.*
- *Limita produkat: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x\to 0}\frac{(-2+x^2)\,\cos x + 2\,(1+x^2-2\,x\,\sin x)}{(1-\cos x)^2} .$$

Namig: $1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$.

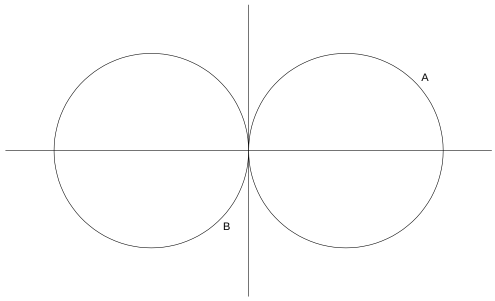
Rešitev: Računamo po L'Hospitalovem pravilu in sproti preverjamo, da sta limiti števca in imenovalca enaki 0, ko $x \to 0$. Računanje si še poenostavimo, tako da imenovalec prepišemo v $4\sin^4(x/2)$ in množimo števec in imenovalec z $(x/2)^4$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{(-2+x^2)\,\cos x + 2\,(1+x^2-2\,x\,\sin x)}{4\sin^4(x/2)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(-2+x^2)\,\cos x + 2\,(1+x^2-2\,x\,\sin x)}{4(x/2)^4}\cdot\frac{(x/2)^4}{\sin^4(x/2)}\\
&= 4\lim_{x\to 0}\frac{(-2+x^2)\,\cos x + 2\,(1+x^2-2\,x\,\sin x)}{x^4}\\
&= 4\lim_{x\to 0}\frac{4x-2x\cos x-(2+x^2)\sin x}{4x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4-2\cos x-(2+x^2)\cos x}{3x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-2x\cos x+2\sin x+(2+x^2)\sin x}{6x}\\
&= \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s pretvorbo na polovične kote: 2 točki.*
- *Množenje in deljenje z x^4: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Preverjanje predpostavk: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Krožnici na sliki 1 imata polmer 1 in središči v točkah $(0,1)$ in $(-1,0)$. Točki A in B se gibljeta po krožnicah z enakomerno kotno hitrostjo ω v smeri nasprotni urinemu kazalcu. V trenutku $t=0$ je točka A v $(1,1)$, točka B pa v $(0,0)$.



Sl. 1 Krožnici, po katerih se gibljeta točki A in B.

a. (10) Pokažite, da je kvadrat razdalje točk A in B v nekem trenutku $t \geq 0$ enak

$$f(t) = 6 - 4\sin(\omega t) - 4\cos(\omega t)\,.$$

Rešitev: Izračunati moramo položaja točk A in B v danem trenutku t. Brž se prepričamo, da sta koordinati točk dani z enačbama

$$(x_A, y_A) = (1 - \sin\omega t, \cos\omega t)$$

in

$$(x_B, y_B) = (\cos\omega t - 1, \sin\omega t)\,.$$

Kvadrat razdalje je dan z

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 6 - 4\sin\omega t - 4\cos\omega t\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s kartezičnimi koordinatami: 2 točki.*
- *Koordinate točke A: 2 točki.*
- *Koordinate točke B: 2 točki.*
- *Formula za kvadrat razdalje: 2 točki.*
- *Poenostavitev: 2 točki.*

b. (10) Poiščite največjo in najmanjšo razdaljo med točkama A in B. Pokažite, da ste res našli največjo in najmanjšo razdaljo.

Napotek: Uporabite $f(t)$ iz a., tudi če ne znate izračunati.

Rešitev: Označimo

$$f(t) = 6 - 4\sin\omega t - 4\cos\omega t\,.$$

Poiščimo, v katerih točkah je $f'(t) = 0$. Odvajamo in izenačimo z 0. Dobimo

$$f'(t) = -4\omega\cos\omega t + 4\omega\sin\omega t = 0\,.$$

Odvod je enak 0*, kadarkoli sta* $\cos \omega t$ *in* $\sin \omega t$ *enaka, kar se zgodi, kadar je* $\omega t = \pi/4 + 2k\pi$ *ali* $\omega t = 5\pi/4 + 2k\pi$ *za celoštevilske* k*. Izračunajmo še*

$$f''(t) = 4\omega^2 \sin \omega t + 4\omega^2 \cos \omega t\,.$$

Za $\omega t = \pi/4$ *dobimo* $f''(t) = 2\sqrt{2}\omega^2 > 0$*, za* $\omega t = 5\pi/4$ *pa* $f''(t) = -2\sqrt{2}\omega^2 < 0$*. V prvem primeru imamo opravka z lokalnim minimumom, v drugem pa z lokalnim maksimumom. Ker je razdalja omejena, sta ta lokalni minimum in maksimum tudi globalna ekstrema. Najmanjša razdalja je torej*

$$\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}\,,$$

največja pa

$$\sqrt{6 + 4\sqrt{2}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Ničle odvoda: 2 točki.*
- *Drugi odvod: 2 točki.*
- *Odločitev, ali gre za lokalne minimume ali lokalne maksimume: 2 točki.*
- *Sklep da so ekstremi globalni, najmanjša, največja razdalja: 2 točki.*

3. (20) Integriranje:

a. (10) Izračunajte integral

$$\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(4-x^2)^2}\,.$$

Rešitev: Gre za racionalno funkcijo, ki jo najprej razstavimo na parcialne ulomke z nastavkom

$$\frac{x^2}{(4-x^2)^2} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{(2-x)^2} + \frac{C}{2+x} + \frac{D}{(2+x)^2}\,.$$

Zmnožimo in dobimo

$$x^2 = A(2-x)(2+x)^2 + B(2+x)^2 + C(2+x)(2-x)^2 + D(2-x)^2\,.$$

Koeficienti morajo ustrezati enačbam

$$\begin{aligned} 0 &= -A + C \\ 1 &= -2A + B - 2C + D \\ 0 &= 4A + 4B - 4C - 4D \\ 0 &= 8A + 4B + 8C + 4D \end{aligned}$$

Iz prve in tretje enačbe sledi $B = D$. Iz druge in četrte dobimo, da je $B = D = 1/4$. Sledi $A = C = -1/8$. Torej je

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(4-x^2)^2} = \frac{1}{8}\log\left(\frac{2-x}{2+x}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{4-x^2}\,.$$

Vstavimo meje in dobimo

$$\int_0^1 \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(4-x^2)^2} = -\frac{\log 3}{8} + \frac{1}{6}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek za parcialne ulomke: 2 točki.*
- *Enačbe za koeficiente: 2 točki.*
- *Koeficienti: 2 točki.*
- *Nedoločeni integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Kot znano privzemite, da je

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Izračunajte

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x\,.$$

Rešitev: *Računamo*

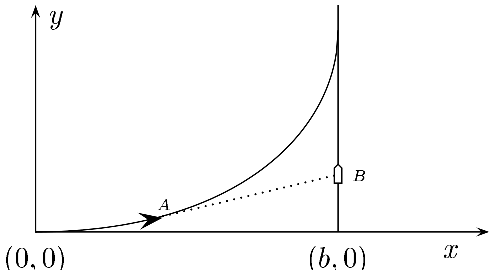
$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2\sin x\cos x}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{\sin(2x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \textit{Nova spremenljivka: } 2x = u \\
&= \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Ocenjevanje:

- *Izbira F in g: 2 točki.*
- *Integriranje g: 2 točki.*
- *Odvajanje F in vstavljanje mej v FG: 2 točki.*
- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Ladja B potuje po premici vzporedni osi y s konstantno hitrostjo β. V trenutku $t = 0$ je ladja v točki $(b, 0)$. V trenutku $t = 0$ iz točke $(0, 0)$ vzleti letalo, ki potuje s konstantno hitrostjo $\alpha > \beta$ tako, da je vedno obrnjeno točno proti ladji kot na sliki 2. Letalo bo potovalo po grafu funkcije $f(x)$. Označite $w(x) = f'(x)$. Funkcija $w(x)$ ustreza diferencialni enačbi

$$w' = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{1+w^2}}{x-b}\,.$$



Sl. 2 Pot letala A med zasledovanjem ladje B.

a. (10) Poiščite rešitev diferencialne enačbe za w na intervalu $[0, b]$. Začetni pogoj je $w(0) = 0$.

Rešitev: Enačbo prepišemo v obliko

$$\frac{w'}{\sqrt{1+w^2}} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{1}{x-b}\,.$$

Integriramo in dobimo

$$\operatorname{arcsinh}(w) = -\frac{\beta}{\alpha}\log(b-x) + c\,.$$

Za $x = 0$ je $w(0) = 0$, zato mora konstanta c v splošni rešitvi ustrezati pogoju

$$0 = -\frac{\beta}{\alpha}\log(b) + c$$

ali

$$c = \frac{\beta}{\alpha}\log(b)\,.$$

Sledi

$$\operatorname{arcsinh}(w) = \log\left(\left(1-\frac{x}{b}\right)^{-\beta/\alpha}\right)\,,$$

torej

$$w(x) = \frac{1}{2}\left((1-\frac{x}{b})^{-\beta/\alpha} - (1-\frac{x}{b})^{\beta/\alpha}\right)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prepis enačbe: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Enačba za konstanto: 2 točki.*
- *Konstanta: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte, v kolikšnem času bo letalo ujelo ladjo.

Namig: y-koordinata ladje, ko jo bo ujelo letalo, bo $\int_0^b w(x)\mathrm{d}x$.

Rešitev: Sledimo namigu. Če poznamo y-koordinato ladje v trenutku t_0, *ko jo bo dohitelo letalo, lahko izračunamo, koliko časa je plula. Označimo y-koordinato z* y_0. *Veljati mora* $\beta t_0 = y_0$. *Po namigu je*

$$\begin{aligned}
y_0 &= \int_0^b w(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^b \left((1-\frac{x}{b})^{-\beta/\alpha} - (1-\frac{x}{b})^{\beta/\alpha}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{b}{2}\left[\frac{-(1-\frac{x}{b})^{-\beta/\alpha+1}}{-\beta/\alpha+1} + \frac{(1-\frac{x}{b})^{\beta/\alpha+1}}{\beta/\alpha+1}\right]_0^b \\
&= \frac{b}{2}\left[\frac{-\alpha}{\beta-\alpha} - \frac{\alpha}{\beta+\alpha}\right] \\
&= \frac{b\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\,.
\end{aligned}$$

Iskani čas je torej

$$t_0 = \frac{b\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Upoštevanje namiga: 2 točki.*
- *Vstavljanje funkcije: 2 točki.*
- *Nedoločeni integral: 2 točki.*
- *Vstavljanje mej: 2 točki.*
- *Čas: 2 točki.*

5. (20) Naj bodo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ poljubni vektorji.

a. (10) Pokažite, da je

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{c},\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2\,.$$

Rešitev: Uporabili bomo pravilo, da je

$$(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z} = -(\mathbf{z},\mathbf{y})\mathbf{x} + (\mathbf{x},\mathbf{z})\mathbf{y}\,.$$

Računamo najprej

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) &= -(\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{c})\,\mathbf{a} + (\mathbf{a},\mathbf{a}\times\mathbf{c})\,\mathbf{b}\\ &= (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\,\mathbf{a}\end{aligned}$$

Uporabili smo dejstvo, da sta vektorja $\mathbf{a}$ *in* $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ *pravokotna in je njun skalarni produkt enak* 0*. Nadaljujemo*

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{c},\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\,(\mathbf{a},\mathbf{b}\times\mathbf{c})\\ &= (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a})\\ &= (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Pravilo za* $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z}$*: 2 točki.*
- *Prva uporaba pravila: 2 točki.*
- *Ortogonalnost: 2 točki.*
- *Druga uporaba pravila* $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z}$*: 2 točki.*
- *Permutacije pri mešanem produktu: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da je

$$(((\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a})\times\mathbf{b})\times\mathbf{a} = (\mathbf{a},\mathbf{b})^2\,\mathbf{a} - (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\mathbf{b}\,.$$

Rešitev: Uporabimo isto pravilo kot v a. Računamo po vrsti:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a} = -(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{a} + (\mathbf{a},\mathbf{a})\mathbf{b}\,.$$

Množimo rezultat vektorsko z $\mathbf{b}$*. Dobimo*

$$-(\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,.$$

Upoštevali smo, da je $\mathbf{b}\times\mathbf{b} = 0$*. Množimo še enkrat vektorsko z* $\mathbf{a}$*. Sledi rezultat*

$$-(\mathbf{a},\mathbf{b})\cdot\left(-(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{a} + (\mathbf{a},\mathbf{a})\mathbf{b}\right)\,.$$

Rezultat še polepšamo v

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})^2\,\mathbf{a} - (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\mathbf{b}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Pravilo prvič: 2 točke.*
- *Pravilo drugič: 2 točke.*
- *Ortogonalnost: 2 točke.*
- *Pravilo tretjič: 2 točke.*
- *Rezultat: 2 točke.*

6. (20) Naj bo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

za $\lambda > 0$.

a. (10) Izračunajte $\mathbf{A}^n$ za $n \geq 1$.

Namig: Izračunajte $\mathbf{A}^2$ *in* $\mathbf{A}^3$.

Rešitev: Izračunajmo najprej $\mathbf{A}^2$. *Množimo*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Izračunamo še $\mathbf{A}^3$.

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

Po indukciji dobimo

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Kvadriranje: 2 točki.*
- *Kubiranje: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*
- *Argumentiranje z indukcijo: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

b. (10) Za $n \geq 1$ izračunajte $\mathbf{A}^{-n}$.

Rešitev: Nalogo lahko rešimo tako, da obrnemo matriko $\mathbf{A}^n$. *Še laže pa dobimo rešitev tako, da uporabimo splošno formulo iz a., ki velja tudi za negativne* n, *torej*

$$\mathbf{A}^{-n} = \begin{pmatrix} \lambda^{-n} & -n\lambda^{-n-1} \\ 0 & \lambda^{-n} \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja (kakršnakoli): 2 točki.*
- *Prvi korak: 2 točki.*
- *Drugi korak: 2 točki.*
- *Preverjanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*