FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

Pisni izpit

13. februar 2003

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Zaporedja in limite.

a. (10) Zaporedje je dano rekurzivno z

$$x_0 = 0 \qquad \text{in} \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}\,.$$

Dokažite z matematično indukcijo, da je $x_n \in [0,1)$ za vse $n \geq 0$. Prepričajte se še, da je zaporedje naraščajoče, ima limito in jo izračunajte.

Rešitev: Po definicije je $x_0 < 1$. Če je $x_n < 1$, je $2 - x_n > 1$, torej je

$$x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n} < 1\,.$$

Za dokaz, da zaporedje narašča, najprej opazimo, da je $x_0 < x_1$. Predpostavimo $x_{n-1} < x_n$. Potem je

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2 - x_{n-1}}{2 - x_n} > 1\,,$$

saj je imenovalec večji od števca. Zaporedje je omejeno in naraščajoče, torej ima limito. Ta mora ustrezati enačbo

$$a = \frac{1}{2 - a}\,,$$

ki ima edino rešitev enako $a = 1$.

Ocenjevanje:

- *Prva indukcijska predpostavka: 2 točki.*
- *Prva indukcija: 2 točki.*
- *Druga indukcijaks predpostavka: 2 točki.*
- *Druga limita: 2 točki.*
- *Obstoj limite in limita: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos(\alpha x)} - \sqrt[n]{\cos(\beta x)}}{x^2}\,.$$

Rešitev: Za $x = 0$ sta števec in imenovalec enaka 0. Računamo po L'Hospitalu.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \downarrow 0} \frac{\sqrt[m]{\cos(\alpha x)} - \sqrt[n]{\cos(\beta x)}}{x^2} \\
&= \lim_{x \downarrow 0} \frac{-\frac{\alpha}{m}\cos^{\frac{1}{m}-1}(\alpha x)\sin(\alpha x) + \frac{\beta}{n}\cos^{\frac{1}{n}-1}(\beta x)\sin(\beta x)}{2x} \\
&= \frac{\beta^2}{2n} - \frac{\alpha^2}{2m}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z L'Hospitalom: 2 točki.*
- *Preverjanje predpostavk: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Uporaba $\sin x/x \to 1$: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Naj bo $a, b > 0$ in naj bo $f(x)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija na $\mathbb{R}$, za katero velja

$$xf''(x) + (b-x)f'(x) - af(x) = 0\,,$$

ter $f(0) = 1$.

a. (10) Označite $c_n = f^{(n)}(0)/n!$. Pokažite, da velja

$$c_{n+1} = c_n \cdot \frac{(a+n)}{(n+1)(b+n)}\,.$$

Namig: Uporabite Leibnizovo pravilo.

Rešitev: Z uporabo Leibnizovega pravila odvajajmo levo in desno stran enakosti za funkcijo $f(x)$ n-krat po x. Dobimo

$$xf^{(n+2)}(x) + nf^{(n+1)}(x) + (b-x)f^{(n+1)}(x) - nf^{(n)}(x) - af^{(n)}(x) = 0\,.$$

Vstavimo $x = 0$ in sledi

$$nf^{(n+1)}(0) + bf^{(n+1)}(0) - nf^{(n)}(0) - af^{(n)}(0) = 0$$

ali

$$f^{(n+1)}(0) = f^{(n)}(0) \cdot \frac{a+n}{b+n}\,.$$

Delimo še na levi in desni z $(n+1)!$ in dobimo želeno trditev.

Ocenjevanje:

- *Leibnizova formula: 2 točki.*
- *Prva uporaba: 2 točki.*
- *Druga uporaba: 2 točki.*
- *Preurejanje členov: 2 točki.*
- *Rekurzivna formula: 2 točki.*

b. (10) Zapišite Taylorjev polinom stopnje n za $f(x)$ in s pomočjo kvocientnega kriterija pokažite, da za $T_n(x)$ konvergira za vse x, ko $n \to \infty$.

Rešitev: Po rekurzijski formuli iz a. sledi, da je Taylorjev polinom enak

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k\,,$$

kjer je $c_0 = 1$ in

$$c_k = \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)}{k!\cdot b(b+1)(b+2)\cdots(b+k-1)}\,.$$

Konvergenca $T_n(x)$ je vprašanje o konvergenci vrste

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)x^k}{k!\cdot b(b+1)(b+2)\cdots(b+k-1)}\,.$$

Uporabimo kvocientni kriterij in dobimo

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(a+k)|x|}{(k+1)(b+k)} = 0\,.$$

Vrsta konvergira za vse $x \in \mathbb{R}$.

Ocenjevanje:

- *Ideja z rekurzijsko formulo iz a.: 2 točki.*
- *Vstavljanje: 2 točki.*
- *Izražava c_n: 2 točki.*
- $T_n(x)$: *2 točki.*
- *Kvocientni kriterij: 2 točki.*

3. (20) Integriranje.

a. (10) Naj bo $f(x) = x^n e^{-x}$ in $g(x) = e^x f^{(n)}(x)$. Za $m < n$ izračunajte izlimitirani integral

$$\int_0^\infty x^m g(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x\,.$$

Namig: $f(x) = f^{(n)}(x)$ *in* $G(x) = x^m$.

Rešitev: Uporabimo integracijo per partes. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^m g(x) e^{-x}\, \mathrm{d}x &= \int_0^\infty x^m f^{(n)}(x)\, \mathrm{d}x \\
&= x^m f^{(n-1)}(x)\Big|_0^\infty - m \int_0^\infty x^{m-1} f^{(n-1)}(x)\, \mathrm{d}x \\
&= -m \int_0^\infty x^{m-1} f^{(n-1)}(x)\, \mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Nadaljujemo in dobimo

$$\int_0^\infty x^m g(x) e^{-x}\, \mathrm{d}x = (-1)^m \cdot m! \cdot \int_0^\infty f^{(n-m)}(x) \mathrm{d}x = (-1)^m \cdot m! \cdot f^{(n-m-1)}(x)\Big|_0^\infty\,.$$

Po definiciji je $f^{(n-m-1)}(0) = 0$ *in tudi*

$$\lim_{x\to\infty} f^{(n-m-1)}(x) = 0\,.$$

Začetni integral je enak 0.

Ocenjevanje:

- *Prepis: 2 točki.*
- *Prvo integriranje per partes: 2 točki.*
- *Iteriranje: 2 točki.*
- *Odprava* x^m*: 2 točki.*
- *Razultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte izlimitirani integral

$$\int_1^\infty \frac{(2-x)\, \mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2 - x + 1}}\,.$$

Namig: Najprej $x = 1/u$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2 - x + 1}} &= \int_0^1 \frac{u^2\left(2 - \frac{1}{u}\right) \mathrm{d}u}{u^2\sqrt{\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} + 1}} \\
&= \int_0^1 \frac{(2u-1)\, \mathrm{d}x}{\sqrt{u^2 - u + 1}} \\
&= 2\sqrt{u^2 - u + 1}\Big|_0^1 \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Vpeljava nove spremenljivke: 2 točki.*
- *Preurejanje: 2 točki.*
- *Opažanje, da je v števcu odvod: 2 točki.*
- *Nedoločni integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 ročki.*

4. (20) Funkcija $y(x)$ naj zadošča Riccatijevi [1] enačbi

$$y' = x^3(y-x)^2 + \frac{y}{x}\,.$$

a. (10) Pokažite, da funkcija $w(x) = \frac{1}{y(x)-x}$ reši enačbo

$$w' + \frac{w}{x} = -x^3\,.$$

Rešitev: Izračunamo

$$y = \frac{1}{w} + x\,.$$

Odvajamo in dobimo

$$y' = -\frac{w'}{w^2} + 1\,.$$

Vstavimo v prvotno enačbo in dobimo

$$-\frac{w'}{w^2} + 1 = \frac{x^3}{w^2} + \frac{1}{xw} + 1\,.$$

Uredimo in pomnožimo z $-w^2$. Sledi

$$w' + \frac{w}{x} = -x^3\,.$$

Ocenjevanje:

- *Izračun y: 2 točki.*
- *Izračun y': 2 točki.*
- *Ideja z vstavljanjem: 2 točki.*
- *Urejanje in množenje: 2 točki.*
- *Linearna diferencialna enačba: 2 točki.*

b. (10) Poiščite splošno rešitev Riccatijeve enačbe in rešitev pri danem začetnem pogoju $y(1) = 0$.

Rešitev: Enačba za w je linearna. Rešitev homogenega dela je $w(x) = 1/x$. Poiskati moramo še partikularno rešitev. Nastavek je $w = c/x$. Vstavimo in dobimo

$$\frac{c'x - c}{x^2} + \frac{c}{x^2} = -x^3$$

ali

$$c' = -x^4\,.$$

Sledi $c = -x^5/5$, torej je partikularna rešitev enaka

$$\frac{c}{x} = -\frac{x^4}{5}\,.$$

Splošna rešitev je oblike

$$w = -\frac{x^4}{5} + \frac{c}{x}\,,$$

[1] Jacopo Francesco Riccati, 1676-1754 je bil italijanski matematik

kjer je c še poljubna konstanta. Če se vrnemo k Riccatijevi enačbi, dobimo

$$y = \frac{1}{w} + x = \frac{x^6 + 5cx - 5x}{x^5 + 5c}\,.$$

Če želimo, da bo $y(1) = 0$, mora veljati

$$y(1) = \frac{-4 + 5c}{1 + 5c} = 0$$

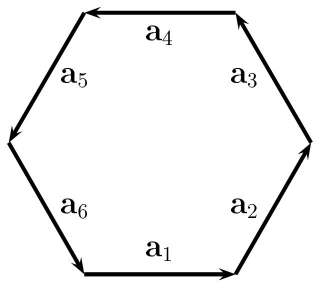
ali $c = 4/5$.

Ocenjevanje:

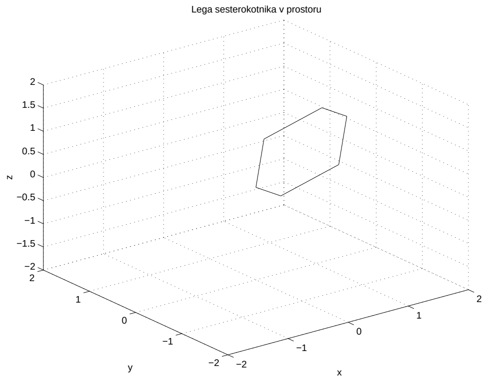
- *w linearna: 2 točki.*
- *Homogena rešitev: 2 točki.*
- *Nastavek za nehomogeno: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*
- *Rešitev z začetnim pogojem: 2 točki.*

5. (20) Vektorji $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_6$ naj ležijo na stanicah pravilnega šesterokotnika s stranico $a = 1$ v prostoru kot na sliki 1a. Lego šesterokotnika v prostoru prikazuje slika 1b. Naj bo

$$\mathbf{a}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \qquad \text{in} \qquad \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right).$$



Sl. 1a Položaj vektorjev $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_6$.



Sl. 1b Lega šesterokotnika v prostoru.

a. (10) Z upoštevanjem formule za $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ izračunajte vektor $\mathbf{a}_2$.

Rešitev: Vemo, da je

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times \mathbf{a}_1 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1)\, \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\, \mathbf{a}_1 .$$

Enotska vektorja $\mathbf{a}_1$ in $\mathbf{a}_2$ oklepata kot $\pi/3$, zato je $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 1/2$. Ker je seveda $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) = 1$, je

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 &= -(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)\, \mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times \mathbf{a}_1 \\ &= \frac{1}{2}\, \mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times \mathbf{a}_1 . \end{aligned}$$

Izračunamo

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \times \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Sledi

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{2\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Formula za trojni produkt: 2 točki.*
- *Prava izbira: 2 točki.*
- *Skalarni produkt* $\mathbf{a}_1$ *in* $\mathbf{a}_2$*: 2 točki.*
- *Izražava* $\mathbf{a}_2$*: 2 točki.*
- *Vektorski produkt in* $\mathbf{a}_2$*: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte še $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ in $\mathbf{a}_6$.

Rešitev: Na podlagi slike je jasno, da je $\mathbf{a}_4 = -\mathbf{a}_1$ *in* $\mathbf{a}_5 = -\mathbf{a}_2$*. Vektor* $\mathbf{a}_3$ *kaže v smeri simetrale kota, ki ga oklepata vektorja* $\mathbf{a}_2$ *in* $-\mathbf{a}_1$*. S slike je tudi razvidno, da je*

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \,.$$

Ocenjevanje:

- $\mathbf{a}_4$*: 2 točki.*
- $\mathbf{a}_5$*: 2 točki.*
- *Ideja za* $\mathbf{a}_3$*: 2 točki.*
- $\mathbf{a}_3$*: 2 točki.*
- $\mathbf{a}_6$*: 2 točki.*

6. (20) Naj bodo $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$ kvadratne matrike.

a. (10) Predpostavite, da so matrike $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ in $\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ obrnljive. Izračunajte

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D})(\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1})\,.$$

Namig: Na pravem mestu napišite $\mathbf{I}=\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D})(\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1})\\
&\quad= \mathbf{I}-\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}+\\
&\qquad\qquad +\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\\
&\quad= \mathbf{I}+\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{B}\mathbf{C}\big(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\big)(\mathbf{C}^{-1}+\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\\
&\quad= \mathbf{I}+\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\\
&\quad= \mathbf{I}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Množenje: 2 točki.*
- *Asociativnost: 2 točki.*
- *Izpostavljanje: 2 točki.*
- *Krajšnje: 2 točki.*
- *Razultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{A}=\mathbf{I}$ in $\mathbf{C}=\mathbf{I}$. Recimo, da poznate $(\mathbf{I}+\mathbf{D}\mathbf{B})^{-1}$. Izrazite $(\mathbf{I}+\mathbf{B}\mathbf{D})^{-1}$.

Rešitev: Iz a. sledi

$$(\mathbf{I}+\mathbf{B}\mathbf{D})^{-1}=\mathbf{I}-\mathbf{B}(\mathbf{I}+\mathbf{D}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z a.: 2 točki.*
- *Inverz identitete: 2 točki.*
- *Vstavljanje v formulo: 2 točki.*
- *Opažanje, da nastopa znana matrika: 2 točki.*
- *Končni sklep: 2 točki.*