FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika I

Pisni izpit

26. januar, 1996

Ime in priimek: ______________________________ ***Letnik:*** ____________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 8, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 3 ure.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
Skupaj			

1. (20) Zaporedje realnih števil $x_1, x_2, \ldots$ je podano z rekurzijsko formulo

$$x_1 = 2 \qquad \text{in} \qquad x_{n+1} = x_n + 2e^{-x_n} - 1\,.$$

a. (10) Dokažite z matematično indukcijo, da je so vsi členi zaporedja večji od $\log(2)$. Upoštevajte, da za $s > 0$ velja $s + 2e^{-s} \geq \log(2) + 1$.

b. (10) Privzemite, da je $x_n \geq \log(2)$ za vse $n \geq 1$. Pokažite, da ima zaporedje $x_1, x_2, \ldots$ limito in jo izračunajte.

2. (20) Limiti, l'Hospitalovo pravilo:

a. (10)

$$\lim_{x\to\infty}(2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}} =$$

b. (10)

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x)\right) =$$

3. (20) Funkcija f naj bo definirana s formulo

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

za $x \geq 1$.

a. (10) Izračunajte odvod funkcije F dane z

$$F(x) = \sinh^2(\log(f(x)) .$$

Kaj vam to pove o funkciji F?

Namig: $\log(f(x))$ *je inverzna funkcija* $\cosh(x)$.

b. (10) Pokažite, da je odvod funkcije f za vse $x > 1$ strogo pozitiven. Kot strogo naraščajoča funkcija ima f inverzno funkcijo g. Izračunjate odvod $g'(y)$.

4. (20) Naj bosta dani funkciji f in g s predpisom

$$f(x) = (1+x)\log(1+x) \qquad \text{in} \qquad g(x) = \frac{\log(1+x)}{(1+x)}\,.$$

za $-1 < x < 1$.

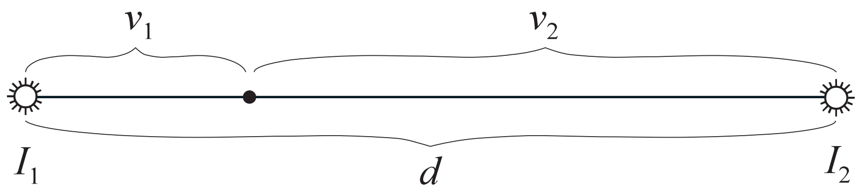
a. (10) Zapišite Taylorjev polinom n–te stopnje za funkcijo f v točki $x_0 = 0$.
Namig: Za izračun k–tega odvoda f uporabite Leibnizovo pravilo.

b. (10) Pokažite, da je Taylorjev polinom n–te stopnje za funkcijo g v točki $x_0 = 0$ oblike

$$T_n(x) = x - (1+\frac{1}{2})x^2 + (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^3 - \ldots + (-1)^{n-1}(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})x^n\,.$$

Namig: Odvajajte $g(x)(1+x) = \log(1+x)$ k–krat.

5. (20) Dana sta dva izvora svetlobe jakosti I_1 in I_2 na razdalji d.



a. (10) Osvetljenost kjerkoli na premici, ki povezuje izvora svetlobe je enaka $L_1 + L_2$, kjer je

$$L_1 = \frac{kI_1}{v_1^2} \qquad \text{in} \qquad L_1 = \frac{kI_2}{v_2^2}\,.$$

Tukaj je k neka fizikalna konstanta, v_1 je oddaljenost od izvora 1 in v_2 oddaljenost od izvora 2. Kje na premici, ki povezuje izvora, je osvetljenost najmanjša?

b. (10) Pokažite, da ste v a. res našli minimum.

6. (20) Uvedba nove spremenljivke:

a. (10) Dokažite, da je

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^m(x)}{\sin^m(x)+\cos^m(x)}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^m(x)}{\sin^m(x)+\cos^m(x)}dx\,.$$

Namig: $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$.

b. (10) Uporabite identiteto v a. (tudi, če je ne znate dokazati), da pokažete

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^m(x)}{\sin^m(x)+\cos^m(x)}dx = \frac{\pi}{4}\,.$$

Namig: Seštejte integrala v a. .

7. (20) Integracija *per partes*, integracija racionalnih funkcij:

a. (10) Dokažite, da je za poljuben $n > 0$

$$\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}dx = \frac{n}{n+3/2} \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1-x}\, dx\,.$$

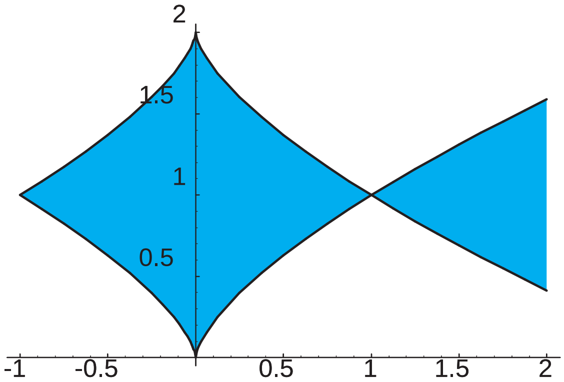
Namig: $(1-x)^{3/2} = (1-x)\sqrt{1-x}$.

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}+x+x^{4/3}} =$$

8. (20) Funkciji f in g naj bosta podani z

$$f(x) = |x|^{2/3} \qquad \text{in} \qquad g(x) = 2 - |x|^{2/3}\,.$$



a. (10) Izračunajte ploščino lika omejenega z grafoma funkcij f in g na intervalu $[-1, 1]$.

b. (10) Izračunajte ploščino lika med grafoma funkcij f in g na intervalu $[1, 2]$.