

FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

Pisni izpit

24. januar, 1997

Ime in priimek: _____ Letnik: _____

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 8, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri in pol (150 min).

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			
8.			
Skupaj			

1. (20) Zaporedje x_1, x_2, \dots naj bo dano z rekurzivno formulo

$$x_1 = 1 \quad \text{in} \quad x_{n+1} = 6x_n^{2/3} - 2x_n.$$

a. (10) Z matematično indukcijo dokažite, da je $1 \leq x_n \leq 8$.

Namig: Funkcija $f(u) = 6u^2 - 2u^3$ je za $u \in [0, 2]$ naraščajoča.

b. (10) Dokažite, da ima zaporedje x_1, x_2, \dots limito in jo izračunajte.

Namig: Upoštevajte, da je $6u^2 - 2u^3 \geq u^3$ za $u \in [0, 2]$.

2. (20) Limite, L'Hospitalovo pravilo:

a. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2 - x^3/6}{(e^x - 1)^4}.$$

b. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{\log(1-x)} - \frac{1}{x} \right).$$

3. (20) Označite s $f(x)$ funkcijo

$$f(x) = \log(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \log(e^x - \sqrt{e^{2x} - 1}).$$

Funkcija f je definirana za $x \geq 0$.

a. (10) Izračunajte odvod funkcije f . Kaj lahko sklepate?

b. (10) Poiščite inverzno funkcijo funkcije

$$g(x) = \log(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1})$$

za $x \geq 0$.

4. (20) Za funkcijo $f(x)$ naj velja

$$f(0) = 1 \quad \text{in} \quad f'(x) = f(x) + e^x.$$

a. (10) Izračunajte Taylorjev polinom $T_n(x)$ za funkcijo $f(x)$ okrog točke $x_0 = 0$.

b. (10) Kakšen je n -ti odvod funkcije f v točki $x_0 = 0$?

5. (20) Za dan $a \neq 0$ naj bo

$$f(\sigma) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}.$$

a. (10) Poiščite maksimum funkcije f za $\sigma > 0$.

b. (10) Prepričajte se, da ste res našli maksimum.

6. (20) Integrali:

a. (10) Izračunajte

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx.$$

b. (10) Izračunajte

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos(x) dx}{\sin^3(x) - \cos^2(x) - 1}.$$

Namig: $u^3 + u^2 - 2 = (u - 1)(u^2 + 2u + 2)$.

7. (20) Integracija per partes:

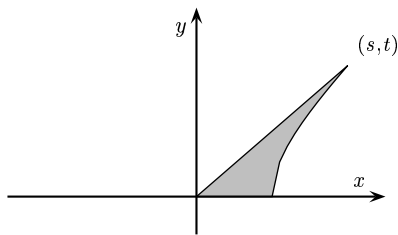
a. (10) Izračunajte integral

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \arcsin(x) dx.$$

b. (10) Dokažite, da je

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{(1-x^2)^n} = \frac{2n-3}{2(n-1)} \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{(n-1)}} + \frac{1}{2(n-1)} \sqrt{2} 2^{n-2}.$$

8. (20) Na spodnji sliki je osenčen lik, ki ga omejujejo x -os, hiperbola $x^2 - y^2 = 1$ in daljica med izhodiščem in točko (s, t) na hiperboli.



a. (10) Naj bo p ploščina osenčenega lika. Pokažite, da je $\cosh(2p) = s$.

b. (10) Poiščite še točko (s, t) , da bo za ploščino p veljalo $\cosh(2p) = 2 \sinh(2p)$.