FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1 & 2

Pisni izpit

21. januar 1999

Ime in priimek: ______________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri in pol (150 min).

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Naj bo k konstanta z $|k| < 1$. Naj za funkcijo $f(x)$ velja $f(0) = 0$ in na $[0, \pi/2]$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}\,.$$

Za funkcijo g pa naj velja $g(0) = 0$ in

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}\,.$$

a. (10) Naj bo $\phi(y)$ inverzna funkcija funkcije $f(x)$ definirana na intervalu $[0, K]$, kjer je $[0, K]$ zaloga vrednosti $f(x)$. Pokažite, da velja

$$\phi'(y) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi(y))}\,. \tag{0.1}$$

Naj bo $\psi(y)$ inverzna funkcija funkcije $g(x)$. Pokažite, da velja $g(\sin(\phi(y)) = y$. Sklepajte, da je $\psi(y) = \sin(\phi(y))$.

Namig: Funkciji sta enaki, če se ujemata v točki in imata isti odvod.

Rešitev: Po formuli za odvajanje invezne funkcije velja

$$\phi'(y) = \frac{1}{f'(\phi(y))}\,,$$

kar je točno zgornja formula. Za drugi del naloge funkcijo $g(\sin(\phi(y))$ odvajamo po y.

$$\begin{aligned}
(g(\sin(\phi(y)))' &= g'(\sin(\phi(y))) \cdot \cos(\phi(y)) \cdot \phi'(y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1 - \sin^2(\phi(y)))(1 - k^2 \sin^2(\phi(y)))}} \cdot \cos(\phi(y)) \cdot \phi'(y) \\
&= \frac{\phi'(y)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi(y))}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Iz besedila naloge sledi tudi $\phi(0) = 0$, torej mora biti $g(\sin(\phi(y)) = y$. Da je potem $\psi(y) = \sin(\phi(y))$ sledi iz definicije inverzne funkcije.

Ocenjevanje:

- *Uporaba formule za odvod inverzne funkcije: 2 točki.*
- *Pravilno odvajanje sestavljene funkcije: 2 točki.*
- *Pravilno vstavljanje: 2 točki.*
- *Preverjanje, da se funkciji ujemata v točki: 2 točki.*
- *Sklepanje o inverzni funkciji: 2 točki.*

b. (10) Uporabite (**??**) za izračun $\phi^{(3)}(0)$.

*Namig: Odvajajte obe strani (**??**).*

Rešitev: Opazimo, da je $\phi(0) = 0$ in zato $\phi'(0) = 1$. Odvajamo zgornjo enačbo po y in dobimo

$$\begin{aligned}
\phi''(y) &= -\frac{k^2 \sin(\phi(y)) \cos(\phi(y)) \phi'(y)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi(y))}} \\
&= -k^2 \sin(\phi(y)) \cos(\phi(y)) \\
&= -\frac{k^2}{2} \sin(2\phi(y))\,.
\end{aligned}$$

Vstavimo $\phi(0) = 0$ *in dobimo* $\phi''(0) = 0$. *Odvajamo še enkrat po* y *in dobimo*

$$\phi^{(3)}(y) = -k^2 \cos(2\phi(y)) \cdot \phi'(y) \,.$$

Vstavimo $y = 0$ *in dobimo* $\phi^{(3)}(0) = -k^2$.

Ocenjevanje:

- *Pravilna uporaba formule: 2 točki.*
- *Prvo odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo odvajanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 4 točke.*

2. (20) Integriranje:

a. (10) Naj bo $a \neq 0$. Izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+(a-x)^2)} .$$

Rešitev: Integrand razstavimo na parcialne ulomke. Zapišimo

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+(a-x)^2)} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C(a-x)+D}{1+(a-x)^2} .$$

Zmnožimo in primerjamo koeficiente. Dobimo enačbe $A-C=0$, $-2aA+B+aC+D=0$, $A(1+a^2)-2aB-C=0$ *in* $B(1+a^2)+aC+D=1$. *Iz prve in tretje enačbe sledi* $aA=2B$. *Vstavimo to v drugo in dobimo* $-B+D=0$. *Iz zadnje enačbe sledi* $B=D=1/(4+a^2)$. *Integriramo*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+(a-x)^2)} &= \frac{1}{4+a^2} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+(a-x)^2} \right) \\
&= \frac{2\pi}{4+a^2} .
\end{aligned}$$

Integrala, ki pripadata koeficientoma A in C izgineta zaradi lihosti.

Ocenjevanje:

- *Parcialni ulomki: 4 točke.*
- *Integriranje: 2+2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte izlimitirani integral

$$\int_0^{\infty} n e^{-x} (1-e^{-x})^{n-1} \, \mathrm{d}x .$$

Rešitev: Uvedemo novo spremenljivko $u = e^{-x}$, *torej* $-e^{-x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} n e^{-x} (1-e^{-x})^{n-1} \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 n(1-u)^{n-1} \, \mathrm{d}u \\
&= -(1-u)^n \Big|_0^1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nova spremenljivka: 4 točke.*
- *Pravilna uvedba nove spremenljivke: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Verhulstova diferencialna enačba, ki opisuje rast populacij, je oblike

$$y' = Ay - By^2 .$$

a. (10) Poiščite rešitev diferencialne enačbe pri začetnem pogoju $y(0) = A/2B$.

Rešitev: Enačbo najprej prepišemo v obliko

$$\frac{y'}{y(A - By)} = 1 .$$

Levo stran razstavimo na parcialne ulomke,

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{y'}{y} + \frac{B}{A} \cdot \frac{y'}{(A - By)} = 1 ,$$

integriramo

$$\frac{1}{A} \log(y) - \frac{1}{A} \log(A - By) = t + c$$

in iz začetnega pogoja določimo konstanto c tako, da vstavimo $y = A/2B$ in $t = 0$. Dobimo

$$c = \frac{1}{A} \log \left(\frac{A/2B}{(A - BA/2B)} \right) = \frac{1}{A} \log(1/B) .$$

Iz tega sledi

$$\log(\frac{y}{A - By}) = At + \log(1/B)$$

ali

$$\frac{y}{A - By} = \frac{e^{At}}{B} .$$

Izračunamo še y in dobimo

$$y(t) = \frac{Ae^{At}}{B(1 + e^{At})} .$$

Ocenjevanje:

- *Prepis enačbe v obliko za integriranje: 2 točki.*
- *Parcialni ulomki: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Določanje konstante: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $A = B = 1$ in $y(0) = 1/4$. V kolikšnem času se bo populacija podvojila? Iščemo čas t, ko bo $y(t) = 1/2$.

Rešitev: Iz a. ugotovimo, da je $c = \log(1/3)$, torej

$$\log \left(\frac{y}{1 - y} \right) = t + \log(1/3) .$$

Ko je $y = 1/2$, dobimo

$$\log(1) = t + \log(1/3) ,$$

od koder sledi $t = \log 3$.

Ocenjevanje:

- *Določitev konstante: 3 točke.*
- *Enačba za t: 3 točke.*
- *Pravilno vstavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Dani naj bodo vektorji

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Poiščite vektor $\mathbf{x}$ dolžine 1, ki je pravokoten na ravnino, ki jo določajo točke $T_1(1,1,1)$, $T_2(-1,0,1)$ in $T_3(0,2,0)$ in je $(\mathbf{a},\mathbf{x}) > 0$.

Rešitev: Vektor $\mathbf{x}$ mora biti pravokoten na $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ in $\mathbf{b}-\mathbf{c}$, torej je oblike

$$\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{c}) \times (\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

za primerno konstanto λ. Vektor mora biti dolžine 1, zato je $|\lambda| = 1/\sqrt{14}$. Iz $(\mathbf{a},\mathbf{x}) > 0$ sledi še, da je $\lambda \cdot (-4) > 0$ ali $\lambda < 0$. Sledi

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je $\mathbf{x}$ kolinearen vektroskemu produktu: 4 točke.*
- *Izračun absolutne vrednosti λ: 2 točki.*
- *Izračun predznaka λ: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ na vektor $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$.

Rešitev: Po formuli za pravokotno projekcijo vektorja na dan vektor je iskani rezultat enak

$$\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{c})}{(\mathbf{a}\times\mathbf{c}, \mathbf{a}\times\mathbf{c})} \cdot \mathbf{a}\times\mathbf{c}\,.$$

Posamezne skalarne produkte lahko izračunamo po Lagrangeovi identiteti.

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{c}) - (\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{a}) = 0\,.$$

Pravokotna projekcija je enaka 0.

Ocenjevanje:

- *Formula za pravokonto projekcijo: 3 točke.*
- *Izračun posameznih skalarnih produktov: 3 točke.*
- *Rezultat: 4 točke.*

5. (20) Naj bo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Poiščite lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $\mathbf{A}$.

Rešitev: Najprej izračunamo karakteristični polinom.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ -4 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(-\lambda(4-\lambda)+4) \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 \end{aligned}$$

Polinom $P(\lambda)$ ima trojno ničlo $\lambda = 2$. Za lastne vektorje izvedemo Gaussov postopek na matriki $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sledi $x_3 = 0$ in $2x_1 = x_2$. Matrika ima rang 2, torej so vsi lastni vektorji oblike $\mathbf{x} = t \cdot (1, 2, 0)$.

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Ničle: 2 točki.*
- *Gaussov postopek: 2 točki.*
- *Lastni vektor: 2 točki.*
- *Dimenzija jedra: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{x}$ lastni vektor matrike $\mathbf{A}$, ki pripada lastni vrednosti λ. Pokažite, da ima enačba

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{x}$$

rešitev.

Rešitev: Iz a. vemo, da je $\lambda = 2$ in $\mathbf{x} = t \cdot (2, 1, 0)$. Izračunati moramo rang razširjene matrike

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & t \\ -4 & 2 & 5 & 2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Iz zapisa je že jasno, da je rang razširjene matrike 2, torej enačba ima rešitev.

Ocenjevanje:

- *Ideja z razširjeno matriko: 4 točke.*
- *Gaussov postopek: 4 točke.*
- *Sklep: 2 točki.*

6. (20) Za dana kota ϕ in θ označite

$$c_\phi = \cos\phi \quad s_\phi = \sin\phi \quad c_\theta = \cos\theta \quad \text{in} \quad s_\theta = \sin\theta\,.$$

Označite

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} c_\phi & -s_\phi c_\theta & s_\phi s_\theta \\ s_\phi & c_\phi c_\theta & -c_\phi s_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta \end{pmatrix}.$$

a. (10) Pokažite, da je za poljubna kota ϕ in θ matrika $\mathbf{Q}$ zasuk v prostoru. Poiščite os vrtenja, če je $\phi = \pi/3$ in $\theta = \pi/4$.

Rešitev: Pokazati moramo, da je $\mathbf{Q}$ *ortogonalna in ima determinanto enako* 1. *Zlahka za prepričamo, da je*

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I} \qquad \textit{in} \qquad \det(\mathbf{Q}) = 1\,.$$

Os vrtenja je lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 1. *Rešiti moramo torej sistem enačb*

$$\begin{pmatrix} c_\phi - 1 & -s_\phi c_\theta & s_\phi s_\theta \\ s_\phi & c_\phi c_\theta - 1 & -c_\phi s_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Z Gaussovim postopkom dobimo $\mathbf{x} = (c_\phi s_\theta + s_\theta, s_\phi s_\theta, s_\phi + s_\phi c_\theta)$.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje ortogonalnosti: 4 točke.*
- *Preverjanje determinante: 2 točki.*
- *Os: 4 točke.*

b. (10) Naj bo $\phi = \pi/2$ in $\theta = \pi/2$. Izračunajte $\mathbf{Q}^7$.

Rešitev: Gre za zasuk okrog osi za kot α, *za katerega velja* $2\cos\alpha + 1 = 0$, *torej* $\alpha = 2\pi/3$. *Iz tega sledi, da je* $\mathbf{Q}^7 = \mathbf{Q}$.

Ocenjevanje:

- *Kot: 5 točk.*
- *Idej s komponiranjem vrtenj: 3 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*