FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

Pisni izpit

15. januar 2001

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Limite zaporedij in funkcij:

a. (10) Zaporedje $x_1, x_2, \ldots$ naj bo dano z rekurzivno formulo

$$x_1 = 1 \qquad \text{in} \qquad x_{n+1} = 6x_n^{2/3} - 2x_n\,.$$

Z matematično indukcijo dokažite, da je $1 \leq x_n \leq 8$, da je zaporedje monotono in izračunajte limito.

Namig: Funkcija $f(u) = 6u^2 - 2u^3$ je za $u \in [1,2]$ naraščajoča.

Rešitev: Dokažati moramo, da iz $x_n \in [1,8]$ sledi, da je tudi $x_{n+1} \in [1,8]$. Najprej je $y_n = \sqrt[3]{x_n} \in [1,2]$. Po namigu to pomeni, da je $x_{n+1} = f(y_n) \in [f(1), f(2)]$. Ker je $f(1) = 2$ in $f(2) = 8$, trditev sledi. Zaporedje je tudi naraščajoče. O tem se najlaže prepričamo s kvocientom

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= 6x_n^{-1/3} - 2 \\ &\geq 6 \cdot 8^{-1/3} - 2 \\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Limita mora ustrezati enačbi $a = 6a^{2/3} - 2a$. Rešitev te enačbe je $a = 8$.

Ocenjevanje:

- *Nastavek za indukcijo: 2 točki.*
- *Indukcijski korak: 2 točki.*
- *Uporaba namiga: 2 točki.*
- *Monotonost: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{z\to 0} \frac{-6z + \log(1+z)\ (6 + (3+z)\ \log(1+z))}{\log(1+z)^4}\,.$$

Rešitev: Računamo po L'Hospitalu in sproti preverjamo, da sta v limiti števec in imenovalec enaka 0. Mimogrede še števec in imenovalec delimo in množimo z z^4.

$$\begin{aligned}&\lim_{z\to 0} \frac{-6\,z + \log(1+z)\ (6 + (3+z)\ \log(1+z))}{\log(1+z)^4} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{-6\,z + \log(1+z)\ (6 + (3+z)\ \log(1+z))}{z^4} \cdot \frac{z^4}{\log(1+z)^4} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{-6 + \log(1+z)\left(\log(1+z) + \frac{3+z}{1+z}\right) + \frac{6+(3+z)\ \log(1+z)}{1+z}}{4z^3} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{-6(1+z) + (1+z)\log(1+z)^2 + 2\log(1+z)(3+z) + 6}{4z^3} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{-6 + \log(1+z)^2 + 2\log(1+z) + \frac{6+2z}{1+z} + 2\log(1+z)}{12z^2} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{\frac{2\log(1+z)}{1+z} + \frac{4z}{(1+z)^2}}{24z} \\ &= \frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z L'Hospitalom in preverjanje: 2 točki.*
- *Prvo odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo odvajanje: 2 točki.*
- *Tretje odvajanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Funkcija $f(x)$ naj bo dana z

$$f(x) = (2-x)^{-m}\,,$$

kjer je $m > 1$ celo število.

a. (10) Pokažite, da je

$$\frac{(2-x)}{m} \cdot f'(x) = f(x)$$

in sklepajte, da velja

$$\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = \frac{(m+n)}{2(n+1)} \cdot \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

za $n = 0, 1, \ldots$.

Rešitev: Z odvajanjem dobimo

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(2-x)^{-m-1} \\ &= \frac{m}{(2-s)} \cdot (2-x)^{-m} \\ &= \frac{m}{(2-x)} \cdot f(x)\,. \end{aligned}$$

Za rekurzivno enačbo odvajamo levo in desno stran n-krat in vstavimo $x = 0$. Dobimo

$$\frac{2}{m} f^{(n+1)}(0) - n\frac{1}{m} f^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)\,.$$

Delimo z $(n+1)!$ in preuredimo. Sledi

$$\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = \frac{(m+n)}{2(n+1)} \cdot \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Preureditev: 2 točki.*
- *Leibniz: 2 točki.*
- *Vstavljanje $x = 0$: 2 točki.*
- *Preureditev in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da je za $|x| < 2$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} 2^{-(m+n)} x^n\,.$$

Namig: Izračunajte prvih nekaj koeficientov.

Rešitev: Naj bo c_k koeficient pri potenci x^k v Taylorjevi vrsti za $f(x)$. Rekurzivna formula v a. nam da

$$c_{n+1} = \frac{(m+n)}{2(n+1)} \cdot c_n\,.$$

Vemo, da je $c_0 = f(0) = 2^{-m}$. *Izračunajmo nekaj členov.*

$$c_1 = \frac{m}{2} \cdot 2^{-m} = m2^{-m-1}\,,$$

$$c_2 = \frac{m+1}{2 \cdot 2} \cdot c_1 = \frac{m(m+1)}{2} \cdot 2^{-m-2}\,,$$

$$c_3 = \frac{m+2}{2 \cdot 3} \cdot c_2 = \frac{m(m+1)(m+2)}{2 \cdot 3} \cdot 2^{-m-3} \qquad \ldots$$

Vzorec koeficientov je razviden. Taylorjeva vrsta predstavlja funkcijo, saj so koeficienti vsi pozitivni (Bernsteinov izrek).

Ocenjevanje:

- c_0: *2 točki.*
- c_1: *2 točki.*
- c_2: *2 točki.*
- *Vzorec: 2 točki.*
- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

3. (20) Integriranje:

a. (10) Izračunajte integral

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 y}{(1+z^2\sin^2 y)^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Namig: Uporabite $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)^2} = \frac{\pi}{2}$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 y\,\mathrm{d}y}{(1+z^2\sin^2 y)^2} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}y}{\sin^2 y\,(\frac{1}{\sin^2 y}+z^2)^2} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2+z^2)^2} \qquad \textit{Nova spr.: } \mathrm{ctg}(y)=t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}u}{(1+z^2)^2(1+u^2)^2} \qquad \textit{Nova spr.: } t=\sqrt{1+z^2}u. \\
&= \frac{2}{\pi(1+z^2)^{3/2}}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} \\
&= \frac{2}{\pi(1+z^2)^{3/2}}\int_0^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{v}(1+v)^2}\,\mathrm{d}v \qquad \textit{Nova spr.: } u^2=v. \\
&= \frac{1}{2(1+z^2)^{3/2}}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Deljenje s* $\sin^2 y$*: 2 točki.*
- *Nova spremenljivka* $\mathrm{ctg}(y)=t$*: 2 točki.*
- *Pretvorba z drugo spremenljivko: 2 točki.*
- *Prevod na namig: 2 točki.*
- *Končni razultat: 2 točki.*

b. (10) Označite

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}\,.$$

Pokažite, da je za $n \geq 1$

$$I_{n+1} = \frac{2n}{2n+1}\,I_n\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1+\frac{1}{2}}} \\
&= \int_0^\infty \frac{(1+x^2-x^2)\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1+\frac{1}{2}}} \\
&= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}} - \int_0^\infty \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1+\frac{1}{2}}} \\
&= I_n - \left[-\frac{x}{2(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}(n+\frac{1}{2})}\Big|_0^\infty + \frac{1}{(n+\frac{1}{2})} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{2(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \right] \\
&= I_n \cdot (1 - \frac{1}{2n+1})\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$I_{n+1} = I_n \cdot \frac{2n}{2n+1}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prvi korak: 2 točki.*
- *Izbira za integracijo per partes: 2 točki.*
- *Integriranje f: 2 točki.*
- *Odvajanje G: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

4. (20) V teoriji elastičnosti nastopa diferencialna enačba

$$y'' + \frac{M}{EI}[1 + (y')^2]^{3/2} = 0\,.$$

a. (10) Označite $y'(x) = v(x)$. Funkcija $v(x)$ ustreza enačbi

$$v' + \frac{M}{EI}\left[1 + v^2\right]^{3/2} = 0\,.$$

Poiščite splošno rešitev te diferencialne enačbe.

Namig: $\left(\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\right)' = \frac{1}{(1+v^2)^{3/2}}$.

Rešitev: Enačbo prepišemo v

$$\frac{\mathrm{d}v}{(1+v^2)^{3/2}} = -\frac{M}{EI}\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}v}{(1+v^2)^{3/2}} &= \int \frac{\cosh t\,\mathrm{d}t}{(1+\sinh^2 t)^{3/2}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}t}{\cosh^2 t} \\ &= \frac{\sinh t}{\cosh t} \\ &= \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\,.\end{aligned}$$

Sledi, da je

$$\frac{v}{\sqrt{1+v^2}} = -\frac{M(x+c)}{EI}\,,$$

kjer je c neka konstanta. Sledi

$$v^2\left(1 + \frac{M^2(x+c)^2}{E^2I^2}\right) = \frac{M^2(x+c)^2}{E^2I^2}\,.$$

Sklepamo

$$v = \pm\frac{M(x+c)}{\sqrt{E^2I^2 + M^2(x+c)^2}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prepis na običajno obliko: 2 točki.*
- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Integral: 2 točki.*
- *Enačba za v: 2 točki.*
- *Splošna rešitev za v: 2 točki.*

b. (10) Poiščite funkcijo $y(x)$ na intervalu $[0, l]$, ki ustreza začetni enačbi in za katero velja $y(0) = y(l) = 0$.

Namig: $y(x) = \int_0^x v(u)\,\mathrm{d}u$.

Rešitev: V a. smo izračunali $y'(x)$. Torej bo

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x v(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^x \frac{M(u+c)}{\sqrt{E^2I^2+M^2(u+c)^2}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{M}\sqrt{E^2I^2+M^2(u+c)^2}\,\Big|_0^x \\ &= \frac{1}{M}\left(\sqrt{E^2I^2+M^2(x+c)^2}-\sqrt{E^2I^2+M^2c^2}\right). \end{aligned}$$

Določiti moramo še konstanto c tako, da bo $y(l)=0$. To se zgodi le, če je $(l+c)^2=c^2$, ali $c=-l/2$. Torej je

$$y(x)=\frac{1}{M}\left(\sqrt{E^2I^2+M^2(x-l/2)^2}-\sqrt{E^2I^2+M^2l^2/4}\right).$$

Ocenjevanje:

- *Ideja, da je y integral v: 2 točki.*
- *Ideja, da integriramo od 0: 2 točki;*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Enačba za konstanto c: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

5. (20) Naj bodo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$ poljubni vektorji v $\mathbb{R}^3$.

a. (10) Pokažite, da je

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c},\mathbf{a})-(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c},\mathbf{b})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot\mathbf{c}-(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c},\mathbf{c})\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c},\mathbf{a})-(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c},\mathbf{b}) &= [(\mathbf{c},\mathbf{a})\mathbf{b}-(\mathbf{c},\mathbf{b})\mathbf{a}]\times\mathbf{c}\\ &= [(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}]\times\mathbf{c}\\ &= (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot\mathbf{c}-(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c},\mathbf{c})\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Formula za* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$*: 2 točki.*
- *Opažanje, da gre za to formulo: 2 točki.*
- *Ponovna uporaba: 2 točki.*
- *Opažanje, da se pojavi mešani produkt: 2 točki.1*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da je

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c},\mathbf{a})+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c},\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c},\mathbf{a})+(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c},\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c},\mathbf{c})\\ &=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c},\mathbf{a})-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c},\mathbf{b})+(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c},\mathbf{c})\\ &=(\mathbf{a},\mathbf{b},(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c},\mathbf{a})-(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c},\mathbf{b})+(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c},\mathbf{c}))\\ &=(\mathbf{a},\mathbf{b},(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\,\mathbf{c})\\ &=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})^2\,.\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Definicija mešanega produkta: 2 točki.*
- *Opažanje, da lahko kaj izpostavimo: 2 točki.*
- *Linearnost mešanega produkta: 2 točki.*
- *Upoštevanje a.: 2 točki.*
- *Upoštevanje drugega dela a: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

6. (20) Naj bo $\mathbf{A}$ matrika dana z

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ -13 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Poiščite lastne vektorje matrike $\mathbf{A}$.

Rešitev: Najprej izračunamo karakteristični polinom. Dobimo

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 63\lambda + 90\,.$$

Možne ničle so delitelji 90*. Brž dobimo, da so lastne vrednosti enake* $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$ *in* $\lambda_3 = 6$*. Poiščimo še lastne vektorje. Dobimo* $\mathbf{x}_1 = (0, 1, -1)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 2, 1)$ *in* $\mathbf{x}_3 = (2, 4, 3)$.

Ocenjevanje:

- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Ničle: 2 točki.*
- *Prvi lastni vektor: 2 točki.*
- *Drugi lastni vektor: 2 točki.*
- *Tretji lastni vektor: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{x}_2 + \nu\mathbf{x}_3$, kjer so $\mathbf{x}_i$ lastni vektorji matrike $\mathbf{A}$, λ, μ, ν pa poljubne konstante. Izračunajte $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$.

Rešitev: Vemo, da je $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_1$*, torej je* $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x_i} = \mathbf{x}_i/\lambda_i$*. Sledi*

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}_1/3 + \mu\mathbf{x}_2/5 + \nu\mathbf{x}_3/6\,.$$

Ocenjevanje:

- *Enačba, ki ji ustrezajo lastni vektorji: 2 točki.*
- *Kam* $\mathbf{A}^{-1}$ *preslika* $\mathbf{x}_i$*: 2 točki.*
- *Linearnost: 2 točki.*
- *Posamezni členi: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*