FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

Pisni izpit

30. januar 2003

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Limite:

a. (10) Francoski matematik François Viète je leta 1593 definiral naslednje zaporedje:

$$a_0 = 1\,, \qquad a_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad \text{in} \qquad a_{n+1} = a_n \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}}\,.$$

Za matematično indukcijo pokažite, da je

$$a_n = \frac{1}{2^n \sin(\pi/2^{n+1})}$$

in izračunajte limito zaporedja a_n.

Namiga: $\cos\alpha = \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2)$ *in* $\sin\alpha = 2\cos(\alpha/2)\sin(\alpha/2)$.

Rešitev: S preprostim računom ugotovimo, da je formula pravilna za $n = 0$ *in* $n = 1$*. Recimo, da formula velja za vse* $k \leq n$*. Računamo*

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\sin(\pi/2^n)}{2\sin(\pi/2^{n+1})} \\
&= \frac{\sin(2\pi/2^{n+1})}{2\sin(\pi/2^{n+1})} \\
&= \frac{2\sin(\pi/2^{n+1})\cos(\pi/2^{n+1})}{2\sin(\pi/2^{n+1})} \\
&= \cos(\pi/2^{n+1})\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{1}{2}\left(1 + \cos(\pi/2^{n+1})\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2(\pi/2^{n+2}) - \sin^2(\pi/2^{n+2})\right) \\
&= \cos^2(\pi/2^{n+2})\,,
\end{aligned}$$

torej

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \cos(\pi/2^{n+2})\,.$$

Sledi

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n \cos(\pi/2^{n+2}) \\
&= \frac{\cos(\pi/2^{n+2})}{2^n \sin(\pi/2^{n+1})} \\
&= \frac{\cos(\pi/2^{n+2})}{2^{n+1}\sin(\pi/2^{n+2})\cos(\pi/2^{n+2})} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}\sin(\pi/2^{n+2})}\,.
\end{aligned}$$

Za izračun limite najprej ugotovimo, da je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a\,.$$

Sledi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2^{-n}\right)}{2^{-n}} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Sledi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{\pi}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Začetek indukcije: 2 točki.*
- *Indukcijski korak: 2 točki.*
- *Zaključek indukcijskega koraka: 2 točki.*
- *Limita s sinusom: 2 točki.*
- *Uporaba in izračun limite a_n: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{x\log x}{x^x - 1}\,.$$

Rešitev: Najprej preverimo

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0} x^x &= \lim_{x\downarrow 0} e^{x\log x}\\ &= e^0\\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Ker je tudi

$$\lim_{x\downarrow 0} x\log x = 0\,,$$

lahko uporabimo L'Hospitalovo pravilo. Potrebujemo še, da je za $x > 0$

$$(x^x)' = x^x(\log x + 1)\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0} \frac{x\log x}{x^x - 1} &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{\log x + 1}{x^x(\log x + 1)}\\ &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x^x}\\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Preverjanje predpostavke za števec: 2 točki.*
- *Preverjanje predpostavke za imenovalec: 2 točki.*
- *Odvajanje x^x: 2 točki.*
- *Krajšanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Pri izračunu energije pospešenega relativističnega delca se pojavi funkcija

$$P(\phi) = \frac{\sin^2 \phi}{(1 - \beta \cos \phi)^5},$$

kjer je $0 < \beta < 1$ konstanta.

a. (10) Poiščite vse stacionarne točke funkcije $P(\phi)$.

Rešitev: Odvajamo po ϕ. Dobimo

$$\frac{2\cos(t)\sin(t)}{(1-\beta\cos(t))^5} - \frac{5\beta\sin(t)^3}{(1-\beta\cos(t))^6}.$$

Točke $\phi = \pi k$ so stacionarne za vsak $k \in \mathbb{Z}$. Za ϕ, ki niso večkratniki π, funkcijo prepišemo v

$$P(u) = \frac{1-u^2}{(1-\beta u)^5},$$

pri čemer je $-1 \le u \le 1$. Odvajamo po u in dobimo

$$\frac{-2u + b\,(5 - 3u^2)}{(-1+\beta u)^6}.$$

Ničle te kvadratne enačbe so oblike

$$u_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+15\beta^2}}{3\beta}.$$

Ker je $-1 \le u \le 1$, pride v poštev le rešitev

$$u_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+15\beta^2}}{3\beta}.$$

Sledi

$$\phi = \pm\arccos\left(\frac{-1+\sqrt{1+15\beta^2}}{3\beta}\right) + 2\pi k$$

za poljubne k.

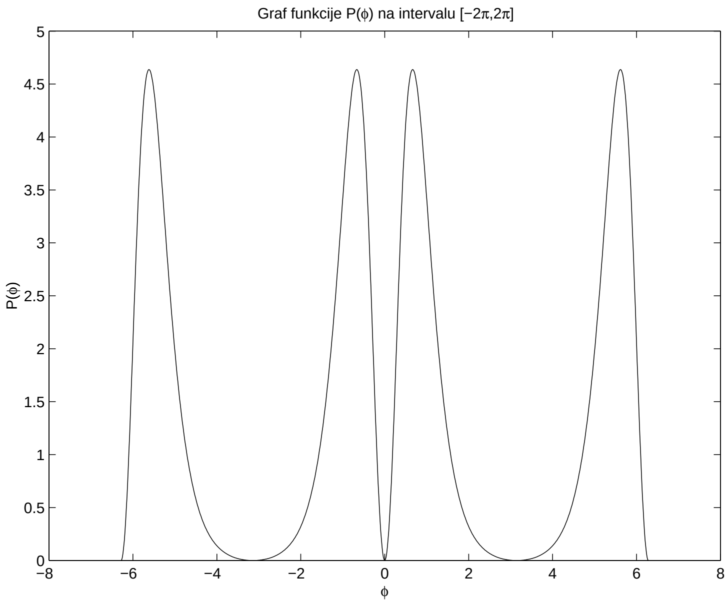
Ocenjevanje:

- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Preurejanje čkenov in πk: 2 točki.*
- *Enačba za ničle, če $\phi \neq k$: 2 točki.*
- *Kvadratna enačba: 2 točki.*
- *Izbira ničel in ostale točke.*

b. (10) Pokažite, da je $\phi = 0$ lokalni minimum.

Namig: Pomislite, preden dvakrat odvajate.

Rešitev: Funkcija je nenegativna, v točkah $\phi = \pi k$ za cele k pa ima vrednost in odvod enak 0. Tam so lahko kvečjemu lokalni minimumi.



Sl. 1 Graf funkcije $P(\phi)$ na $[-2\pi, 2\pi]$.

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da je funkcija pozitivna: 2 točki.*
- *Kaj bi s pozitivnostjo: 2 točki.*
- *Sklep o lokalnih minimumih: 2 točki.*
- *Razlaga, zakaj gre za lokalni minimum: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

3. (20) Integriranje:

a. (10) Privzemite, da je za poljuben a

$$\int_0^\infty \cos(ax)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+a^2} \quad \text{in} \quad \int_0^\infty \sin(ax)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{1+a^2}\,.$$

Pokažite, da je za poljuben a

$$\int_0^\infty x\cos(ax)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2}\,.$$

Rešitev: Označimo želeni integral z I in integriramo dvakrat per partes.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty x\cos(ax)e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= -xe^{-x}\cos(ax)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty (\cos(ax) - ax\sin(ax))\, e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1+a^2} - a\int_0^\infty x\sin(ax)e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1+a^2} + axe^{-x}\sin(ax)\Big|_0^\infty - a\int_0^\infty (\sin(ax) + ax\cos(ax))e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1+a^2} - \frac{a^2}{1+a^2} - a^2 I\,.
\end{aligned}$$

Izračunamo

$$(1+a^2)I = \frac{1-a^2}{1+a^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prvo integriranje per partes: 2 točki.*
- *Drugo integriranje per partes: 2 točki.*
- *Enačba za I: 2 točki.*
- *Opažanje, da spet pridelamo I: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte izlimitirani integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{tg}^{1/2}x\,\mathrm{d}x}{(\sin x + \cos x)\sin x}\,.$$

Rešitev: Uvedemo novo spremenljivko $\mathrm{tg}x = u$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{tg}^{1/2}x\,\mathrm{d}x}{(\sin x + \cos x)\sin x} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{tg}^{1/2}x\,\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{tg}^2 u + \mathrm{tg}u} \\
&= \int_0^\infty \frac{u^{1/2}\,\mathrm{d}u}{u^2+u} \\
&= \int_0^\infty \frac{u^{1/2-1}\,\mathrm{d}u}{1+u}
\end{aligned}$$

Uvedimo še novo spremenljivko $u = v^2$, *torej* $\mathrm{d}u = 2v\mathrm{d}v$. *Dobimo*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{u^{1/2-1}\,\mathrm{d}u}{1+u} &= \int_0^\infty \frac{2v\,\mathrm{d}v}{v(1+v^2)} \\ &= 2\mathrm{arctg}v\Big|_0^\infty \\ &= 2\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \pi\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prva nova spremenljivka: 2 točki.*
- $\mathrm{d}x$*: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Druga nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) V številnih primerih opisa poteka kemijskih reakcij nastopi diferencialna enačba

$$\dot{y} = ay^2 + by + c$$

za dane konstante a, b in c.

a. (10) Predpostavite, da je $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ in $a < 0$. Izračunajte splošno rešitev diferencialne enačbe.

Rešitev: Enačbo prepišemo v

$$\frac{\dot{y}}{ay^2 + by + c} = 1\,,$$

torej

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{ay^2 + by + c} = \int \mathrm{d}t\,.$$

Lotimo se integracije leve strani.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}y}{ay^2 + by + c} &= \int \frac{\mathrm{d}y}{a\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}y}{a\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}} \\
&= \frac{1}{a} \int \frac{\mathrm{d}y}{\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}} \\
&= \frac{4a}{\sqrt{-\Delta}} \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1} \qquad \textit{Nova spremenljivka } y + \tfrac{b}{2a} = \tfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\, u \\
&= \frac{4a}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2ay + b}{\sqrt{-\Delta}}\right).
\end{aligned}$$

Označimo $\delta = \sqrt{-\Delta}$. *Sledi*

$$\frac{4a}{\delta} \operatorname{arctg}\left(\frac{2ay + b}{\delta}\right) = t + d\,,$$

kjer je d *še poljubna konstanta. Torej je*

$$\frac{2ay + b}{\delta} = \operatorname{tg}\left(\frac{\delta(t + d)}{4a}\right)$$

ali

$$y(t) = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \operatorname{tg}\left(\frac{\delta(t + d)}{4a}\right).$$

Ocenjevanje:

- *Prepis enačbe: 2 točki.*
- *Prepis imenovalca v integralu: 2 točki.*
- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Integral: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Predpostavite $y(0) = 0$. Pokažite, da je v tem primeru

$$y(t) = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\,\frac{\delta\,\mathrm{tg}(\beta t) + b}{\delta + b\,\mathrm{tg}(\beta t)}\,,$$

kjer je $\delta = \sqrt{-\Delta}$ in $\beta = \delta/4a$. Izračunajte še

$$\lim_{t\to 2\pi a/\sqrt{-\Delta}} y(t)\,.$$

Namig: Uporabite zvezo

$$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y}{1 + \mathrm{tg}\,x \cdot \mathrm{tg}\,y}\,.$$

Rešitev: Določiti moramo konstanto d na tak način, da bo $y(0) = 0$. Iz a. sledi, da je

$$\frac{4a}{\delta}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{b}{\delta}\right) = d\,.$$

Označimo $\beta = \delta/4a$. Sledi

$$\begin{aligned}
y(t) &= -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\delta(t+d)}{4a}\right)\\
&= -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\mathrm{tg}\left(\beta t + \beta d\right)\\
&= -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\,\frac{\mathrm{tg}(\beta t) + \mathrm{tg}(\beta d)}{1 + \mathrm{tg}(\beta t)\cdot\mathrm{tg}(\beta d)}\\
&= -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\,\frac{\mathrm{tg}(\beta t) + b/\delta}{1 + \mathrm{tg}(\beta t)\cdot b/\delta}\\
&= -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\,\frac{\delta\,\mathrm{tg}(\beta t) + b}{\delta + b\,\mathrm{tg}(\beta t)}\,.
\end{aligned}$$

Za izračun limite opazimo, da $\beta t \to \pi/2$, ko $t \to 2\pi a/\sqrt{-\Delta}$. Sledi

$$\lim_{t\to 2\pi a/\sqrt{-\Delta}} y(t) = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta^2}{2ab}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Kam bi del začetni pogoj: 2 točki.*
- *Enačba za d: 2 točki.*
- *Vstavljanje nazaj v enačbo: 2 točki.*
- *Uporaba enakosti za tangense: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*

5. (20) Vektorji $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ in $\mathbf{z}$ naj bodo vsi enotski in paroma ortogonalni. Poleg tega naj velja $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = 1$. Projekcija $\mathbf{x}$ na xy-ravnino naj z x-osjo oklepa kot α, projekcija $\mathbf{y}$ na yz-ravnino naj z y-osjo oklepa kot β in projekcija $\mathbf{z}$ na xz-ravnino naj z x-osjo oklepa kot γ.

a. (10) Naj bodo $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$ in $\mathbf{e}_3$ bazni vektorji v $\mathbb{R}^3$. Pokažite, da velja

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \sqrt{1-\lambda^2}(\cos\alpha\,\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\,\mathbf{e}_2) + \lambda\mathbf{e}_3\\ \mathbf{y} &= \sqrt{1-\mu^2}(\cos\beta\,\mathbf{e}_2 + \sin\beta\,\mathbf{e}_3) + \mu\mathbf{e}_1\\ \mathbf{z} &= \sqrt{1-\nu^2}(\cos\gamma\,\mathbf{e}_1 + \sin\gamma\,\mathbf{e}_3) + \nu\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

za neke konstante λ, μ in ν.

Namig: $\mathbf{x}$ *lahko napišemo kot* $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \lambda\mathbf{e}_3$, *kjer je* $\mathbf{x}'$ *projekcija na* xy *ravnino.* $\mathbf{x}'$ *lahko izrazimo z uporabo* $\sin\alpha$ *in* $\cos\alpha$.

Rešitev: Vektor $\mathbf{x}$ *lahko zapišemo kot vsoto projekcije na* xy*-ravnino in komponente v smeri* z*-osi, ki bo oblike* $\lambda\mathbf{e}_3$ *za neko konstanto* λ. *Projekcija* $\mathbf{x}$ *oklepa z* x*-osjo kot* α, *zato bo oblike* $\lambda'(\cos\alpha\,\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\,\mathbf{e}_2)$ *za nek* λ'. *Sledi*

$$\mathbf{x} = \lambda'(\cos\alpha\,\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\,\mathbf{e}_2) + \lambda\mathbf{e}_3\,.$$

Ker je vektor $\mathbf{x}$ *enotski, mora veljati*

$$(\lambda')^2 + \lambda^2 = 1\,,$$

torej $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$. *Podobno sklepamo za vektorja* $\mathbf{y}$ *in* $\mathbf{z}$.

Ocenjevanje:

- *Razcep na projekcijo in komplement: 2 točki.*
- *Zapis projekcije: 2 točki.*
- *Ideja z dolžino: 2 točki.*
- $\mathbf{y}$*: 2 točki.*
- $\mathbf{z}$*: 2 točki.*

b. (10) Na podlagi ortogonalnosti $\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ in $\mathbf{z}$ sklepajte, da velja

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\sin\beta + \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\cos\alpha = -\sin\alpha\cos\beta\,,$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\sin\gamma + \frac{\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}\sin\alpha = -\cos\alpha\cos\gamma\,,$$

in

$$\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\cos\gamma + \frac{\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}\cos\beta = -\sin\beta\sin\gamma\,.$$

Rešitev: Zaradi ortogonalnosti je $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$. *Po drugi strani je skalarni produkt enak*

$$\mu\sqrt{1-\lambda^2}\cos\alpha + \sqrt{1-\lambda^2}\sqrt{1-\mu^2}\sin\alpha\cos\beta + \lambda\sqrt{1-\mu^2}\sin\beta = 0\,.$$

Delimo enačbo z $\sqrt{1-\lambda^2}\sqrt{1-\mu^2}$ *in preuredimo. Ostali dve enačbi dobimo podobno na podlagi* $(\mathbf{x},\mathbf{z}) = 0$ *in* $(\mathbf{y},\mathbf{z}) = 0$.

Ocenjevanje:

- *Ideja s skalarnim produktom: 2 točki.*
- *Izračun skalarnega produkta: 2 točki.*
- *Krajšanje: 2 točki.*
- *Druga enačba: 2 točki.*
- *Tretja enačba: 2 točki.*

6. (20) Naj bo

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Izračunajte $\mathbf{V}^2$, $\mathbf{V}^3$, $\mathbf{V}^4$, $\mathbf{V}^{-1}$. Kolikšne so lahko lastne vrednosti $\mathbf{V}$ po absolutni vrednosti?

Rešitev: Z matričnim množenjem dobimo

$$\mathbf{V}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{V}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{in} \qquad \mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Če je $\mathbf{x}$ *lastni vektor* $\mathbf{V}$, *potem je* $\mathbf{V}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. *Sledi*

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}^4\mathbf{x} = \lambda^4\mathbf{x}.$$

Sledi $|\lambda| = 1$.

Ocenjevanje:

- $\mathbf{V}^2$: *2 točki.*
- $\mathbf{V}^3$: *2 točki.*
- $\mathbf{V}^4$: *2 točki.*
- $\mathbf{V}^{-1}$: *2 točki.*
- *Sklep o lastnih vrednostih: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da je $\mathbf{VT} = \mathbf{T}^2\mathbf{V}^3$.

Rešitev: Izračunamo

$$\mathbf{VT} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in

$$\mathbf{T}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sledi

$$\mathbf{T}^2\mathbf{V}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Množenje na levi: 2 točki.*
- $\mathbf{T}^2$: *2 točki.*
- *Upoštevanje* $\mathbf{V}^3$: *2 točki.*
- *Množenje na desni: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*