

FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika I

Pisni izpit

1. julij, 1996

Ime in priimek: _____ *Letnik:* _____

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 8, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri in pol (150 min).

Naloga	a.	b.	Skupaj
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
Skupaj			

1. (20) Zaporedje realnih števil x_1, x_2, \dots je podano z rekurzijsko formulo

$$x_1 = 3 \quad \text{in} \quad x_{n+1} = 4\sqrt{x_n} - x_n.$$

- a. (10) Dokažite z matematično indukcijo, da je $2 \leq x_n \leq 4$ za vse $n \geq 1$.

Namig: Upoštevajte, da je $2 < 4u - u^2 < 4$ za $\sqrt{2} < u < 2$.

- b. (10) Privzemite, da je $2 < x_n < 4$ za vse $n \geq 1$. Dokažite, da zaporedje x_1, x_2, \dots ima limito in jo izračunajte.

Namig: Upoštevajte a., tudi če ne znate dokazati in izračunajte x_{n+1}/x_n .

2. (20) Limiti, L'Hospitalovo pravilo:

a. (10) Izračunajte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(\log(\log(x)))}{\log(\log(x))}.$$

b. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\operatorname{ctg}(x)}.$$

3. (20) Odvodi, inverzne funkcije:

a. (10) Izračunajte odvod funkcije

$$F(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(x))$$

za $0 < x < \pi$. Kaj vam odvod pove o funkciji F ?

Opomba: $\operatorname{arctg}(x)$ je inverzna funkcija $\operatorname{tg}(x)$ (ne $\operatorname{ctg}(x)$).

b. (10) Izračunajte odvod funkcije $F(x) = \operatorname{ctg}(\arccos(x))$ za $-1 < x < 1$. Primerjajte odvod $F'(x)$ z odvodom funkcije $g(x) = x/\sqrt{1-x^2}$. Kaj lahko ugotovite?

4. (20) Naj bo $f(x) = \cos^2(x)$.

a. (10) Zapišite Taylorjev polinom $2n + 1$ -ve stopnje v točki $x_0 = 0$ za funkcijo f .

Namig: Upoštevajte, da je $\cos^2(x) = (1 + \cos(2x))/2$.

b. (10) Izračunajte še Taylorjev polinom n -te stopnje v točki $x_0 = 0$ za funkcijo $f(x) = \sin^2(x)$.

5. (20) Kroglo s polmerom r pokrijemo s stožcem, ki se krogle dotika in stoji na istih tleh kot kroglja.

- a. (10) Poiščite višino stožca, ki ustreza zgornjim pogojem in ima najmanjšo možno prostornino? Prepričajte se, da ste našli stožec z najmanjšo prostornino.

Namig: Prostornina stožca je enaka $Bh/3$, kjer je B ploščina osnovne ploskve in h višina.

- b. (10) Kateri stožec, ki ustreza zgornjim pogojem, ima plašč z najmanjšo površino?

Namig: Površina plašča je sorazmerna produktu razdalje od vrha do oboda osnovne ploskve in obsega osnovne ploskve.

6. (20) Uvedba nove spremenljivke, racionalne funkcije:

a. (10) Z razcepom na parcialne ulomke izračunajte

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)^3}.$$

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\arcsin^2(x)\sqrt{1-x^2}}.$$

7. (20) Integracija per partes, algebraične funkcije.

a. (10) Z uvedbo nove spremenljivke in integracijo per partes izračunajte integral

$$\int_0^1 \arcsin^2(x) dx .$$

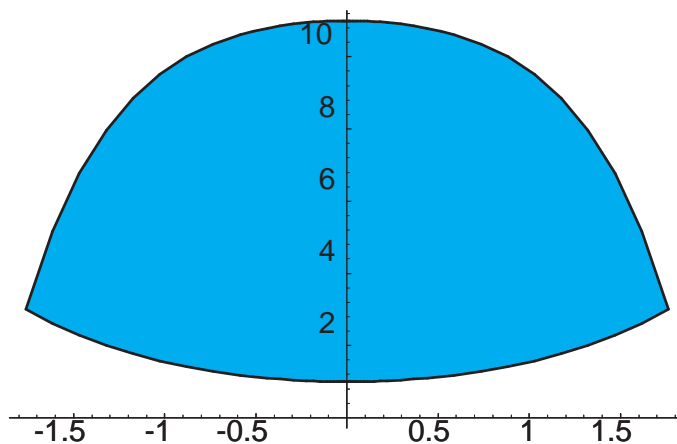
b. (10) Izračunajte integral

$$\int_{-1}^1 x^5 (1 - 2x^3)^{2/3} dx .$$

Namig: $x^3 = u$.

8. (20) Lik omejujeta grafa funkcij

$$f(x) = \cosh(x) \quad \text{in} \quad g(x) = 12 - \cosh^2(x).$$



a. (10) Izračunajte ploščino osenčenega lika.

Namig: Inverzna funkcija hiperboličnega kosinusa je $\log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ in $\cosh^2(x) = (1 + \cosh(2x))/2$.

b. (10) Izračunajte ploščino dela osenčenega lika nad premico, ki gre skozi presečišči grafov obeh funkcij.