FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1 & 2

Pisni izpit

30. junij 1998

Ime in priimek: ______________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri (120 min).

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (20) Funkcija $f(x)$ je za $x \neq 1$ definirana z

$$f(x) = \mathrm{arctg}(\frac{1+x}{1-x})\,.$$

a. (10) Na intervalu $(-\infty, 1)$ je $f(x)$ monotono naraščajoča. Naj bo $g(y)$ inverzna funkcija definirana na intervalu $(-\pi/4, \pi/2)$. Izračunajte odvod $g'(\pi/4)$.

Rešitev: Po formuli za odvod inverzne funkcije je

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}\,.$$

Poiskati moramo najprej $g(\pi/4)$, ali z drugimi besedami, rešiti enačbo

$$f(x) = \mathrm{arctg}(\frac{1+x}{1-x}) = \pi/4\,.$$

Sledi

$$\frac{1+x}{1-x} = 1\,, \qquad \textit{torej} \qquad x = 0\,.$$

Odvajajmo še

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Izračunamo

$$g'(\pi/4) = \frac{1}{f'(0)} = 1\,.$$

Ocenjevanje:

- *Formula za odvod inverzne funkcije: 3 točke.*
- *Izračun $g(\pi/4)$: 3 točke.*
- *Odvod $f(x)$: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

b. (10) Razvijte funkcijo $f(x)$ v potenčno vrsto okrog točke $x = 0$ in določite radij konvergence dobljene potenčne vrste.

Rešitev: Iz a. dobimo, da je

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Vemo, da je $f(0) = \pi/4$ in

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}\,.$$

Ta slednja vrsta konvergira za $|x| < 1$. Ker potenčne vrste lahko členoma integriramo, dobimo

$$f(x) = \pi/4 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,.$$

Za določitev radija konvergence lahko uporabimo kvocientni kriterij in dobimo

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{2(k+1)+1}{2k} = 1\,,$$

Torej vrsta konvergira za $|x| < 1$.

Ocenjevanje:

- *Ideja, da razvijemo najprej odvod: 2 točki.*
- *Razvoj odvoda v potenčno vrsto: 2 točki.*
- *Integriranje po členih: 2 točki.*
- a_0 *in končni rezultat: 2 točki.*
- *Radij konvergence: 2 točki.*

2. (20) Integriranje:

a. (10) Izračunajte integral

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}+1}} .$$

Rešitev: Najprej uvedemo novo spremenljivko $u = e^{-x}$. Dobimo

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}+1}} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}} \\
&= \log(v + \sqrt{1+v^2}) \Big|_0^1 \\
&= \log(\sqrt{2}+1)
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Pravilno spremenjene meje: 2 točki.*
- *Pravilno pretvorjen* $\mathrm{d}x$*: 2 točki.*
- *Pravi nastavek za pretvorjen integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Označite

$$I_m = \int_0^{\pi/2} x^m \sin x \, \mathrm{d}x .$$

Pokažite, da je za $m \geq 2$

$$I_m = m((\pi/2)^{m-1} - (m-1)I_{m-2})$$

in izračunajte I_4.

Rešitev: Integriramo per partes in dobimo

$$\begin{aligned}
I_m &= \int_0^{\pi/2} x^m \sin x \, \mathrm{d}x \\
&= -x^m \cos x \Big|_0^{\pi/2} + m \int_0^{\pi/2} x^{m-1} \cos x \mathrm{d}x \\
&= m(x^{m-1} \sin x \Big|_0^{\pi/2} - (m-1) \int_0^{\pi/2} x^{m-2} \sin x \mathrm{d}x) \\
&= m((\pi/2)^{m-1} - (m-1)I_{m-2})
\end{aligned}$$

Za I_4 uporabimo rekurzivno formulo in računamo

$$\begin{aligned}
I_4 &= 4((\pi/2)^3 - 3I_2) \\
&= 4((\pi/2)^3 - 3(2((\pi/2) - I_0)) \\
&= 4(\pi/2)^3 - 24(\pi/2) + 24
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prvi per partes: 3 točke.*
- *Drugi per partes: 3 točke.*
- *Smiselna uporaba rekurzije: 2 točki.*
- *Rezultat za* I_4*: 2 točki.*

3. (20) Verhulstova diferencialna enačba, ki opisuje rast populacij, je oblike

$$y' = Ay - By^2 .$$

a. (10) Poiščite rešitev diferencialne enačbe pri začetnem pogoju $y(0) = A/2B$.

Rešitev: Enačbo najprej prepišemo v obliko

$$\frac{y'}{y(A - By)} = 1 .$$

Levo stran razstavimo na parcialne ulomke,

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{y'}{y} + \frac{B}{A} \cdot \frac{y'}{(A - By)} = 1 ,$$

integriramo

$$\frac{1}{A} \log(y) - \frac{1}{A} \log(A - By) = t + c$$

in iz začetnega pogoja določimo konstanto c tako, da vstavimo $y = A/2B$ in $t = 0$. Dobimo

$$c = \frac{1}{A} \log\left(\frac{A/2B}{(A - BA/2B)}\right) = \frac{1}{A} \log(1/B) .$$

Iz tega sledi

$$\log(\frac{y}{A - By}) = At + \log(1/B)$$

ali

$$\frac{y}{A - By} = \frac{e^{At}}{B} .$$

Izračunamo še y in dobimo

$$y(t) = \frac{Ae^{At}}{B(1 + e^{At})} .$$

Ocenjevanje:

- *Prepis enačbe v obliko za integriranje: 2 točki.*
- *Parcialni ulomki: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Določanje konstante: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $A = B = 1$ in $y(0) = 1/4$. V kolikšnem času se bo populacija podvojila? Iščemo čas t, ko bo $y(t) = 1/2$.

Rešitev: Iz a. ugotovimo, da je $c = \log(1/3)$, torej

$$\log\left(\frac{y}{1 - y}\right) = t + \log(1/3) .$$

Ko je $y = 1/2$, dobimo

$$\log(1) = t + \log(1/3) ,$$

od koder sledi $t = \log 3$.

Ocenjevanje:

- *Določitev konstante: 3 točke.*
- *Enačba za t: 3 točke.*
- *Pravilno vstavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Naj bosta dana vektorja

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Izračunajte $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ in $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Rešitev: Po formuli je

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mešani produkt $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ *je enak kvadratu norme* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$*, torej* 18.

Ocenjevanje:

- *Izračun vektorskega produkta: 5 točk.*
- *Izračun mešanega produkta: 5 točk.*

b. (10) Poiščite vektor $\mathbf{c}$ dolžine $2\sqrt{2}$, ki je pravokoten na $\mathbf{a}$, oklepa s vektorjem $\mathbf{b}$ kot $\pi/6$ in zadošča pogoju $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$.

Namig: Vektorji $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *in* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *so baza.*

Rešitev: Po namigu je

$$\mathbf{c} = \lambda\mathbf{b} + \mu(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Ker je kot med $\mathbf{c}$ *in* $\mathbf{b}$ *enak* $\pi/6$*, mora biti skalarni produkt*

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}, \mathbf{b}) &= |\mathbf{c}||\mathbf{b}|\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{6}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 6 \\ &= (\lambda\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 6\lambda \end{aligned}$$

Torej je $\lambda = 1$*. Po drugi strani mora biti*

$$|\mathbf{c}|^2 = \lambda^2|\mathbf{b}|^2 + \mu^2|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2,$$

torej

$$8 = 6 + 18\mu^2$$

ali $\mu = \pm\frac{1}{3}$. *Ker je* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mu\mathbf{a} \times \mathbf{b}) > 0$*, je torej* $\mu|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 > 0$*, torej* $\mu > 0$*. Vektor* $\mathbf{c}$ *je enak*

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev, zakaj je* $\mathbf{c}$ *linearna kombinacija kot v namigu: 2 točki.*
- *Določitev* λ*: 3 točke.*
- *Določitev* μ*: 3 točke.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

5. (20) Dan naj bo sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & \lambda x_3 & = & 2-\lambda \end{array}$$

a. (10) Ali ima ta sistem rešitev za vsak λ?

Rešitev: Izvedemo Gaussov postopek na razširjeni matriki:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -3\lambda-2 & 5-3\lambda \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3\lambda-9 & -9-3\lambda \end{pmatrix}$$

Če je $\lambda \neq -3$ sta ranga matrike in razširjene matrike enaka 3, torej sistem ima rešitev. Če je $\lambda = -3$, sta ranga enaka 2 in sistem tudi ima rešitev.

Ocenjevanje:

- *Prvi korak Gaussovega postopka: 3 točke.*
- *Drugi korak Gaussovega postopka: 3 točke.*
- *Sklepanje v primeru $\lambda \neq -3$: 2 točki.*
- *Sklepanje v primeru $\lambda = -3$: 2 točki.*

b. (10) Za primer, ko ima sistem več rešitev, napišite vse možne rešitve.

Rešitev: Iz a. sledi, da dobimo več rešitev v primeru $\lambda = -3$. V tem primeru si lahko x_3 poljubno izberemo in z njim izrazimo x_1 in x_2 iz enačb

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & x_2 & = & 1-2x_3 \\ & & x_2 & = & -2+x_3 \end{array}$$

Dobimo $x_2 = -2 + x_3$ in $x_1 = 1 - x_3$. Vse rešitve sistema so oblike

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je več rešitev za $\lambda = -3$: 3 točke.*
- *Izračun x_1 in x_2: 3 točke.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Jedro: 2 točki.*

6. (20) Naj bo $\mathbf{A}$ $n \times n$ matrika, za katero velja $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

a. (10) Pokažite, da so lastne vrednosti $\mathbf{A}$ enake ali 0 ali 1.

Rešitev: Naj bo λ lastna vrednost in $\mathbf{x}$ pripadajoči lastni vektor, torej $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Po drugi strani je

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{A}^2\mathbf{x} \\ &= \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) \\ &= \lambda\mathbf{A}\mathbf{x} \\ &= \lambda^2\mathbf{x}\end{aligned}$$

Sledi, da je $\lambda\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{x}$ je različen od 0, zato je $\lambda^2 = \lambda$, iz česar sledi, da je $\lambda = 0$ ali $\lambda = 1$.

Ocenjevanje:

- *Uporaba $\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$: 4 točke.*
- *Enačba $\lambda^2 = \lambda$: 4 točke.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $\mathbf{x}$ lastni vektor matrike $\mathbf{A}$. Pokažite, da je

$$\left(\frac{1}{3}\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^2 (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-2} \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{9} \cdot \mathbf{x}\,.$$

Rešitev: Naj bo $\mathbf{x}$ lastni vektor matrike $\mathbf{A}$, ki pripada lastni vrednosti λ. Vemo, da je

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})^2\mathbf{x} = (\lambda + 1)^2\mathbf{x}\,.$$

Pomnožimo na obeh straneh z $(\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-2}$. Sledi

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-2}\mathbf{x} = \frac{1}{(\lambda + 1)^2}\mathbf{x}$$

Pomnožimo še z $(\frac{1}{3}\mathbf{I} - \mathbf{A})^2$. Dobimo

$$\left(\frac{1}{3}\mathbf{I} - \mathbf{A}\right)^2 (\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-2}\mathbf{x} = \frac{1}{(\lambda + 1)^2}\left(\frac{1}{3} - \lambda\right)^2\mathbf{x}\,.$$

Torej je $\mathbf{x}$ tudi lastni vektor zmnožka, ki pripada lastni vrednosti

$$\frac{1}{(\lambda + 1)^2}\left(\frac{1}{3} - \lambda\right)^2.$$

Če je $\lambda = 0$, dobimo po zgornji formuli $1/9$ in isto, če je $\lambda = 1$.

Ocenjevanje:

- *Izračun $(\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-2}\mathbf{x}$: 4 točke.*
- *Izračun celega produkta: 4 točke.*
- *Sklep, da je rezultat $\frac{1}{9}\mathbf{x}$: 2 točki.*