FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1 & 2

Pisni izpit

19. junij 1998

Ime in priimek: ______________________ **Letnik:** ________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri (120 min).

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (20) Limite in odvodi:

a. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x+x^2)-x}{x^2}\,.$$

Rešitev: Vrednost števca in imenovalca je za $x=0$ enaka 0, zato lahko uporabimo L'Hospitalovo pravilo.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x+x^2)-x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1+2x}{1+x+x^2}-1}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x-x^2}{2x(1+x+x^2)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-x}{2(1+x+x^2)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *L'Hospital: 2 točki.*
- *Preverjanje, da sta števec in imenovalec 0: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Prekladanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte 100-ti odvod funkcije $f(x)=\log(x^2-3x+2)$ v točki $x=0$.

Rešitev: Funkcijo $f(x)$ najprej prepišemo v

$$f(x)=\log(x-2)+\log(x-1)$$

in odvajamo vsak člen posebej. Hitro se prepričamo, da je za $k\geq 1$

$$(\log(x-2))^{(k)}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x-2)^k} \quad \textit{in} \quad (\log(x-1))^{(k)}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x-1)^k}\,.$$

Vstavimo $x=0$ in $k=100$ in dobimo

$$f^{(100)}(0)=-\frac{99!}{2^{100}}-\frac{99!}{1^{100}}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z razcepom: 2 točki.*
- *Odvajanje prvega člena: 2 točki.*
- *Odvajanje drugega člena: 2 točki.*
- *Rezultat: 4 točke.*

2. (20) Pri obeh spodnjih nalogah upoštevajte kot dano, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,.$$

a. (10) Naj bo $\Phi(x) = \int_0^x e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$. Izračunajte

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2/2}\,\Phi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Rešitev: Najprej moramo opaziti, da je $\Phi'(x) = e^{-x^2/2}$. Nato integriramo per partes.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} xe^{-x^2/2}\,\Phi(x)\,\mathrm{d}x &= -e^{-x^2/2}\cdot\Phi(x)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\cdot e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad x = u/\sqrt{2} \\
&= \int_0^{\infty} e^{-u^2/2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev $\Phi'(x) = e^{-x^2/2}$: 4 točke.*
- *Pravilni per partes: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Za poljuben $a \in \mathbb{R}$ izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cdot e^{-(a-x)^2/2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Namig: $x^2 + (a-x)^2 = 2(x-a/2)^2 + a^2/2$.

Rešitev: Upoštevamo namig in računamo

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cdot e^{-(a-x)^2/2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x-a/2)^2/2-a^2/4}\,\mathrm{d}x \\
&= e^{-a^2/4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x-a/2)^2/2}\,\mathrm{d}x \\
&= e^{-a^2/4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2}\,\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}} \qquad\qquad \sqrt{2}(x-a/2) = u \\
&= e^{-a^2/4}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{\pi}e^{-a^2/4}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Dopolnitev eksponenta do polnega kvadrata: 2 točki.*
- *Izpostavljanje $e^{-a^2/4}$: 2 točki.*
- *Uvedba nove spremenljivke: 2 točki.*
- *Upoštevanje danega dejstva: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

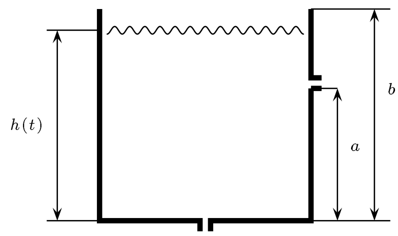
3. (20) Valjasta posoda je do višine b napolnjena z vodo. Na višini $a < b$ je odprtina s presekom ω in na dnu je odprtina s presekom ω. Označimo z $h(t)$ višino gladine v trenutku t (glej sliko), pri čemer je $h(0) = b$. Funkcija $h(t)$ ustreza diferencialni enačbi

$$\omega\mu\sqrt{2gh} + \omega\mu\sqrt{2g(h-a)} = -Dh'$$

dokler gladina ne doseže prve odprtine in enačbi

$$\omega\mu\sqrt{2gh} = -Dh',$$

ko je gladina pod višino a. Pri tem je g zemeljski pospešek, μ dana konstanta in D ploščina osnovne ploskve valja.



a. (10) Izračunajte čas, ki je potreben, da gladina doseže prvo odprtino.

Rešitev: Diferencialno enačbo prepišemo v obliko

$$\frac{h'}{\sqrt{h} + \sqrt{h-a}} = -\beta,$$

kjer je $\beta = \omega\mu\sqrt{2g}/D$. *Integriramo levo in desno stran in dobimo*

$$\frac{2h^{3/2}}{3a} - \frac{2(h-a)^{3/2}}{3a} = -\beta t + c.$$

Iz začetnih pogojev sledi

$$\frac{2b^{3/2}}{3a} - \frac{2(b-a)^{3/2}}{3a} = c.$$

Iz tega razberemo, da je čas, ki je potreben, da gladina doseže višino a enak

$$t_1 = \frac{2}{3a\beta}(b^{3/2} - a^{3/2} - (b-a)^{3/2}).$$

Ocenjevanje:

- *Spoznanje, da je enačba z ločljivima spremenljivkama: 2 točki.*
- *Prepsi v primerno obliko: 2 točki.*
- *Izračun integrala: 2 točki.*
- *Uporaba začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Po kolikšnem času bo posoda prazna?

Rešitev: Očitno bo rešitev $t_1 + t_2$, kjer je t_1 čas iz a. in t_2 čas, ki je potreben, da izteče vsa voda potem, ko bo enkrat dosegla nivo a. Če začnemo po t_1 znova meriti čas, moramo rešiti drugo od zgornjih dveh diferencialnih enačb z začetnim pogojem $h(0) = a$. Prepišemo v

$$\frac{h'}{\sqrt{h}} = -\beta\,,$$

integriramo

$$2\sqrt{h} = -\beta t + c$$

in določimo $c = 2\sqrt{a}$. Ko je $h = 0$, mora biti $t_2 = 2\sqrt{a}/\beta$. Celoten čas, dokler ne izteče vsa voda, je $t_1 + t_2$.

Ocenjevanje:

- *Spoznanje, da je čas $t_1 + t_2$: 2 točki.*
- *Prepisovanje diferencialne enačbe v primerno obliko: 2 točki.*
- *Integracija: 2 točki.*
- *Izračun casa t_2 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

4. (20) Dana naj bosta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$, taka da je $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \neq -1$. Poiskati želimo vektorja $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$, ki ustrezata enačbama

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\times\mathbf{x}+\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{b}\times\mathbf{y}+\mathbf{x} &= \mathbf{c}\,, \end{aligned}$$

kjer je $\mathbf{c}$ dan vektor.

a. (10) Pokažite, da velja

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\mathbf{x}-(\mathbf{b},\mathbf{x})\,\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{c}\,.$$

Rešitev: Iz prve enačbe izrazimo $\mathbf{y}=\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{x}$ *in vstavimo v drugo enačbo. Dobimo*

$$\mathbf{b}\times(\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{x})+\mathbf{x}=\mathbf{c}\,.$$

Levo stran pretvorimo v

$$\mathbf{b}\times\mathbf{b}+(\mathbf{a}\times\mathbf{x})\times\mathbf{b}=(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\mathbf{x}-(\mathbf{b},\mathbf{x})\,\mathbf{a}\,,$$

kar je že želena enačba.

Ocenjevanje:

- *Ideja izraziti* y *iz prve enačbe: 4 točke.*
- *Uporaba pravila za* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$*: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$.

Namig: Uporabite a., tudi če ne znate dokazati.

Rešitev: Iz a. razberemo, da potrebujemo le še $(\mathbf{b},\mathbf{x})$*. Drugo enačbo pomnožimo skalarno z* $\mathbf{b}$ *in upoštevamo linearnost skalarnega produkta in dejstvo, da je* $\mathbf{b}\times\mathbf{y}$ *pravokoten na* $\mathbf{b}$*. Ostane* $(\mathbf{x},\mathbf{b})=(\mathbf{c},\mathbf{b})$*. Sledi*

$$\mathbf{x}=\frac{\mathbf{c}+(\mathbf{c},\mathbf{b})\,\mathbf{a}}{1+(\mathbf{a},\mathbf{b})}\,.$$

Ko enkrat imamo $\mathbf{x}$ *lahko izrazimo še* $\mathbf{y}$ *iz prve enačbe. Dobimo*

$$\mathbf{y}=\mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{c}}{1+(\mathbf{a},\mathbf{b})}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da manjka samo* $(\mathbf{b},\mathbf{x})$*: 2 točki.*
- *Uporaba druge enačbe za izračun* $(\mathbf{b},\mathbf{x})$*: 4 točke.*
- *Izračun* $\mathbf{x}$*: 2 točki.*
- *Izračun* $\mathbf{y}$ *2 točki.*

5. (20) Matrika $\mathbf{A}$ naj bo dana z

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 17 & 4 \\ -4 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

a. (10) Naj bo $\mathbf{b} = (1, 0, -1, 4)^T$. Ali ima enačba $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ rešitev?

Rešitev: Podobno kot pri b. dobimo z Gaussovim postopkom enačbo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & 4 & -1 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 72 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Sistem enačb nima rešitev.

Ocenjevanje:

- *Smiselno izveden Gaussov postopek: 6 točk.*
- *Sklep o nerešljivosti: 4 točke.*

b. (10) Pokažite, da za vektorje oblike $\mathbf{b} = (a, c, a, 0)^T$ enačba $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ima rešitev. Zapišite vse rešitve te enačbe.

Rešitev: Izvedemo Gaussov postopek pri čemer prej zamenjamo prvo in tretjo vrstico.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & 4 & a \\ 0 & 18 & 0 & 0 & c \\ 17 & 0 & 1 & -4 & a \\ -4 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & 4 & a \\ 0 & 18 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -288 & -72 & -16a \\ 0 & 0 & 72 & 18 & 4a \end{pmatrix} \to$$

Delimo tretjo vrstico s 4 in jo prištejemo zadnji. Dobimo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & 4 & a \\ 0 & 18 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -72 & -18 & -4a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang razširjene matrike je enak rangu matrike, torej sistem enačb ima rešitev. Poljubno si izberimo x_4 in izrazimo rešitve:

$$x_3 = -\frac{x_4}{4} + \frac{a}{18} \quad x_2 = \frac{c}{18} \quad x_1 = \frac{a}{18} + \frac{x_4}{4}.$$

Iz tega razberemo, da so vse rešitve oblike

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{18} \\ \frac{c}{18} \\ \frac{a}{18} \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ocenjevanje:

- *Pravilno izveden Gauss: 4 točke.*
- *Sklep o rešljivosti: 2 točki.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Jedro: 2 točki.*

6. (20) Dana naj bo matrika

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/2+\sqrt{2}/4 & -1/2 & 1/2-\sqrt{2}/4 \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 & -1/2 \\ 1/2-\sqrt{2}/4 & 1/2 & 1/2+\sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$$

a. (10) Pokažite, da je matrika $\mathbf{Q}$ rotacija v prostoru in izračunajte os in kot zasuka.

Rešitev: Da matrika $\mathbf{Q}$ predstavlja rotacijo v prostoru se zlahko prepričamo tako, da preverimo $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ in $\det(\mathbf{Q}) = 1$. Vemo, da je os vrtenja lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti $\lambda = 1$. Najti moramo torej rešitev sistema enačb

$$\begin{array}{rcrcrcl} (-1/2+\sqrt{2}/4)x_1 & - & x_2/2 & + & (1/2-\sqrt{2}/4)x_3 & = & 0 \\ x_1/2 & + & (\sqrt{2}/2-1)x_2 & - & x_3/2 & = & 0 \\ (-1/2-\sqrt{2}/4)x_1 & + & x_2/2 & + & (-1/2+\sqrt{2}/4)x_3 & = & 0 \end{array}$$

Vemo, da je rang zgornjega sistema enak 2. Izberimo si $x_3 = 1$ in rešimo preostali sistem enačb.

$$\begin{array}{rcrcr} (-1/2+\sqrt{2}/4)x_1 & - & x_2/2 & = & -1/2+\sqrt{2}/4 \\ x_1/2 & + & (\sqrt{2}/2-1)x_2 & = & 1/2 \end{array}$$

Pomnožimo drugo enačbo z $\sqrt{2}/2+1$ in jo odštejmo prvi. Dobimo

$$-x_1 = -1$$

ali $x_1 = 1$. Sledi še $x_2 = 0$. Os še normiramo, tako da ima dolžino 1. Dobimo $\mathbf{e} = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$. Za kot dobimo $2\cos\theta + 1 = 1 + \sqrt{2}$ ali $\cos\theta = \sqrt{2}/2$. Torej je kot $\pm\pi/4$. Določiti moramo še predznak. Vemo, da je

$$-e_3 \sin\theta + (1-\cos\theta)e_1 e_2 = -\frac{1}{2}\,.$$

Sledi $\sin\theta = \sqrt{2}/2$ in je kot $\pi/4$.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ in $\det(\mathbf{Q}) = 1$: 2 točki.*
- *Izračun osi: 4 točke.*
- *Izračun kota: 4 točke.*

b. (10) Izračunajte še $\mathbf{Q}^{-7}$.

Rešitev: Matrika $\mathbf{Q}^{-7}$ predstavlja zasuk okrog osi $\mathbf{e}$ za kot $-7\cdot\pi/4$. To je enako kot zasuk za kot $\pi/4$, ki ga opisuje matrika $\mathbf{Q}$. Torej je $\mathbf{Q}^{-7} = \mathbf{Q}$.

Ocenjevanje:

- *Ideja, da gre za večkratni zasuk: 4 točke.*
- *Ugotovitev, da gre za zasuk za $\pi/4$: 4 točke.*
- *Ugotovitev, da je rezultat $\mathbf{Q}$: 2 točki.*