FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

Pisni izpit

19. junij 2000

Ime in priimek: ________________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Limite:

a. (10) Kot znano privzemite Stirlingovo formulo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n \cdot e^{-n}} = 1\,.$$

Izračunajte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot \binom{2n}{n}\cdot 2^{-2n}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot \binom{2n}{n}\cdot 2^{-2n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot 2^{-2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot \frac{\sqrt{4\pi n}\cdot (2n)^{2n}\cdot e^{-2n}}{2\pi n\cdot n^{2n}\cdot e^{-2n}}\cdot 2^{-2n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Utemeljitev nadomeščanja fakultet s Stirlingovo formulo: 2 točki.*
- *Pravilno vstavljanje: 2 točki.*
- *Zbiranje potenc n in 2: 2 točki*
- *Krajšanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte

$$\lim_{x\downarrow 0} (1+\sinh x)^{\frac{1}{\mathrm{tg} x}}\,.$$

Rešitev: Izraz najprej logaritmiramo in računamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\downarrow 0} \frac{\log(1+\sinh x)}{\mathrm{tg} x} &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{\cosh x}{(1+\sinh x)(1+\mathrm{tg}^2 x)} \qquad \textit{L'Hospital} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Torej je

$$\lim_{x\downarrow 0} (1+\sinh x)^{\frac{1}{\mathrm{tg} x}} = e\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z logaritmom: 2 točki.*
- *Ideja z L'Hospitalom: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Preverjanje predpostavk za L'Hospitala: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Naj bo $G(x)$ funkcija, za katero velja

$$G'(x) = e^{-x^2/2}$$

in $G(x) > 0$ za vse x.

a. (10) Naj bo

$$F(x) = e^{-x^2} + 2xe^{-x^2/2}G(x)\,.$$

Pokažite, da je

$$F'(x) = 2e^{-x^2/2}G(x)(1 - x^2)\,.$$

Rešitev: Odvajamo

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(e^{-x^2} + 2xe^{-x^2/2}G(x)\right)' \\ &= -2xe^{-x^2} + 2e^{-x^2/2}G(x) - 2x^2e^{-x^2/2}G(x) + 2xe^{-x^2/2}e^{-x^2/2} \\ &= 2e^{-x^2/2}G(x)(1 - x^2)\,. \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Odvajanje prvega člena: 2 točki.*
- *Odvajanje produkta: 2 točki.*
- *Odvajanje prvih dveh členov v produktu: 2 točki.*
- *Odvajanje tretjega člena: 2 točki.*
- *Razultat: 2 točki.*

b. (10) Poiščite lokalne ekstreme funkcije

$$F(x) = e^{-x^2} + 2xe^{-x^2/2}G(x)$$

in ugotovite, ali so lokalni minimumi ali lokalni maksimumi.

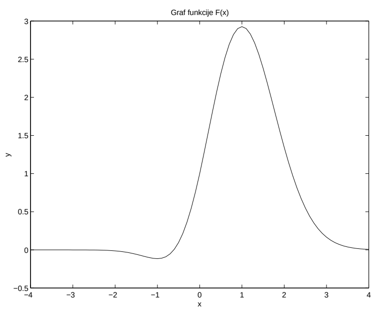
Rešitev: Iz a. vemo, da je $F'(x) = 2e^{-x^2/2}G(x)(1 - x^2)$. *Ker je* $G(x) > 0$, *sta stacionarni točki enaki* $x = 1$ *in* $x = -1$. *Potrebujemo še druga odvoda v točkah* $x = 1$ *in* $x = -1$. *Računamo*

$$F''(x) = -2xe^{-x^2/2}G(x)(1 - x^2) + 2e^{-x^2/2}G'(x)(1 - x^2) - 4xe^{-x^2/2}G(x)\,.$$

Dobimo

$$F''(-1) = 4e^{-1/2}G(-1) \qquad \textit{in} \qquad F''(1) = -4e^{-1/2}G(1)\,.$$

Ker je $G(x) > 0$, *je* $x = -1$ *lokalni minimum in* $x = 1$ *lokalni maksimum. Graf funkcije je na spodnji sliki*



Slika 1 Graf funkcije $F(x)$

Ocenjevanje:

- *Ideja, da je treba 2. odvod: 2 točki.*
- *Izračun drugega odvoda: 2 točki.*
- *Vstavljanje $x = -1$: 2 točki.*
- *Vstavljanje $x = 1$: 2 točki.*
- *Sklepi: 2 točki.*

3. (20) Integriranje:

a. (10) Izračunajte

$$\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}\,x^3}\,.$$

Rešitev: Ustrezna nova spremenljivka bo $1+x^2=u^2$ *z* $u\,\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}x$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}\,x^3} &= \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}\,x^4} \\
&= \int_{2}^{\infty} \frac{u\,\mathrm{d}u}{u(u^2-1)^2} \\
&= \int_{2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(u^2-1)^2}
\end{aligned}$$

Za izračun integrala uporabimo parcialne ulomke. Vemo, da bo

$$\frac{1}{(u^2-1)^2} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{(u-1)^2} + \frac{C}{u+1} + \frac{D}{(u+1)^2}\,.$$

Zmnožimo in dobimo

$$1 = A(u^2-1)(u+1) + B(u+1)^2 + C(u^2-1)(u-1) + D(u-1)^2\,.$$

Zberemo koeficiente pri potencah u in dobimo enačbe

$$A+C=0 \qquad A+B-C+D=0 \qquad -A+2B-C-2D=0 \qquad \textit{in} \qquad -A+B+C+D=1\,.$$

Seštejemo drugo in četrto enačbo in dobimo $B+D=1/2$. *Iz prve in druge enačbe sledi* $2A=-1/2$, *torej* $A=-1/4$. *Sledi* $C=1/4$. *Iz tretje enačbe sledi* $B-D=0$, *torej* $B=D=1/4$. *Dobimo*

$$\begin{aligned}
\int_{2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(u^2-1)^2} &= \frac{1}{4}\left(\log\left(\frac{u+1}{u-1}\right)\Big|_2^{\infty} - \frac{1}{u+1}\Big|_2^{\infty} - \frac{1}{u-1}\Big|_2^{\infty}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(-\log(3) + \frac{1}{3} + 1\right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{\log 3}{4}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prva substitucija: 2 točki.*
- *Zamenjava mej: 2 točki.*
- *Parcialni ulomki in enačbe za konstante: 2 točki.*
- *Konstante: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Za $\lambda > 0$ izračunajte

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\sin(ax)\,\mathrm{d}x\,.$$

Rešitev: Označimo iskani integral z I. Z integracijo per partes dobimo

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin(ax)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{e^{-\lambda x}\sin(ax)}{\lambda}\Big|_0^\infty + \frac{a}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\cos(ax)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{a}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\cos(ax)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{ae^{-\lambda x}\cos(ax)}{\lambda^2}\Big|_0^\infty - \frac{a^2}{\lambda^2}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin(ax)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{a}{\lambda^2} - \frac{a^2}{\lambda^2}\cdot I\,.
\end{aligned}
$$

Dobimo

$$I = \frac{a}{a^2+\lambda^2}$$

Ocenjevanje:

- *Prvo integriranje per partes: 2 točki.*
- *Vstavljenje mej: 2 točki.*
- *Drugo integriranje per partes: 2 točki.*
- *Vstavljanje mej: 2 točki.*
- *Izračun I: 2 točki.*

4. (20) Gibanje planeta okrog sonca si lahko mislimo kot gibanje v xy-ravnini, kjer je sonce v izhodišču. To gibanje lahko opišemo s funkcijo $r(\phi)$, kjer je ϕ kot med osjo x in daljico, ki povezuje planet in izhodišče, r pa razdalja planeta od izhodišča. Funkcija $y(\phi) = 1/r(\phi)$ zadošča diferencialni enačbi

$$y' = \sqrt{\frac{\epsilon^2}{p^2} - \left(y - \frac{1}{p}\right)^2},$$

kjer sta ϵ in p konstanti, odvisni od mas planetov in gravitacijske konstante.

a. (10) Poiščite splošno rešitev zgornje diferencialne enačbe.

Rešitev: Diferencialno enačbo prepišemo v

$$\frac{y'}{\sqrt{\frac{\epsilon^2}{p^2} - \left(y - \frac{1}{p}\right)^2}} = 1\,.$$

Za splošno rešitev moramo poiskati nedoločen integral zgornjega izraza. Označimo $\epsilon^2/p^2 = a^2$*. Uporabili bomo tudi novo spremenljivko* $av = y - 1/p$*. Računamo*

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{\epsilon^2}{p^2} - \left(y - \frac{1}{p}\right)^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v^2}} \\ &= \arcsin(v) \\ &= \arcsin\left(\frac{1}{a}\left(y - \frac{1}{p}\right)\right)\end{aligned}$$

Splošna rešitev enačbe je torej

$$\arcsin\left(\frac{1}{a}\left(y - \frac{1}{p}\right)\right) = \phi + c$$

ali

$$\frac{1}{a}\left(y - \frac{1}{p}\right) = \sin(\phi + c)$$

ali

$$y(\phi) = \frac{1}{p} + a\sin(\phi + c)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da gre za enačbo z ločljivima spremenljivkama: 2 točki.*
- *Prepisovanje v obliko primerno za integriranje: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Upoštevanje integracijske konstante: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Rešite zgornjo enačbo pri začetnem pogoju $y(0) = 1/p + \epsilon/p$.

Rešitev: V splošni rešitvi iz a. moramo določiti konstanto c. Veljati mora

$$\frac{1}{p} + a = \frac{1}{p} + a\sin(c)\,.$$

Sledi, da mora biti

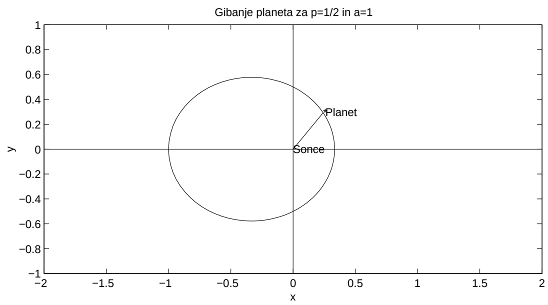
$$\sin(c) = 1$$

ali

$$c = \frac{\pi}{2}\,.$$

Rešitev enačbe je torej

$$y(\phi) = \frac{1}{p} + a\cos(\phi)\,.$$



Sl. 1 Gibanje planeta kot rešitev diferencialne enačbe. Dobimo Keplerjev zakon.

Ocenjevanje:

- *Prepis splošne rešitve: 2 točki.*
- *Vstavljanje začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Enačba za c: 2 točki.*
- *Konstanta c: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

5. (20) Dana naj bosta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$, taka da je $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq -1$. Poiskati želimo vektorja $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$, ki ustrezata enačbama

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} &= \mathbf{c}\,, \end{aligned}$$

kjer je $\mathbf{c}$ dan vektor.

a. (10) Pokažite, da velja

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})\, \mathbf{x} - (\mathbf{b}, \mathbf{x})\, \mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{c}\,.$$

Rešitev: Iz prve enačbe izrazimo $\mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ *in vstavimo v drugo enačbo. Dobimo*

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{c}\,.$$

Levo stran pretvorimo v

$$\mathbf{b} \times \mathbf{b} + (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\, \mathbf{x} - (\mathbf{b}, \mathbf{x})\, \mathbf{a}\,,$$

kar je že želena enačba.

Ocenjevanje:

- *Ideja izraziti y iz prve enačbe: 4 točke.*
- *Uporaba pravila za* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$*: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$.

Namig: Uporabite a., tudi če ne znate dokazati.

Rešitev: Iz a. razberemo, da potrebujemo le še $(\mathbf{b}, \mathbf{x})$*. Drugo enačbo pomnožimo skalarno z* $\mathbf{b}$ *in upoštevamo linearnost skalarnega produkta in dejstvo, da je* $\mathbf{b} \times \mathbf{y}$ *pravokoten na* $\mathbf{b}$*. Ostane* $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{b})$*. Sledi*

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{c} + (\mathbf{c}, \mathbf{b})\, \mathbf{a}}{1 + (\mathbf{a}, \mathbf{b})}\,.$$

Ko enkrat imamo $\mathbf{x}$ *lahko izrazimo še* $\mathbf{y}$ *iz prve enačbe. Dobimo*

$$\mathbf{y} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{c}}{1 + (\mathbf{a}, \mathbf{b})}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da manjka samo* $(\mathbf{b}, \mathbf{x})$*: 2 točki.*
- *Uporaba druge enačbe za izračun* $(\mathbf{b}, \mathbf{x})$*: 4 točke.*
- *Izračun* $\mathbf{x}$*: 2 točki.*
- *Izračun* $\mathbf{y}$ *2 točki.*

6. (20) Naj bo $\mathbf{A}$ dana $n \times n$ matrika in naj velja $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

a. (10) Naj bo

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{I} + \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

Pokažite, da je $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$.

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T &= \Big((\mathbf{I} + \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\Big)\Big((\mathbf{I} + \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\Big)^T \\
&= \Big((\mathbf{I} + \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\Big)\Big(((\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1})^T(\mathbf{I} + \mathbf{A})^T\Big) \\
&= \Big((\mathbf{I} + \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\Big)\Big((\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A}^T)\Big) \\
&= \Big((\mathbf{I} + \mathbf{A})(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\Big)\Big((\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A})\Big) \\
&= \mathbf{I}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Zapis* $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$*: 2 točki.*
- *Pravila za transponiranje: 2 točki.*
- *Komutiranje invertiranja in transponiranja: 2 točki.*
- *Komutiranje vseh matrik: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*

b. (10) Naj bo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

in naj bo $\mathbf{Q}$ definirana kot v a. Pokažite, da je lastni vektor $\mathbf{x}$ matrike $\mathbf{A}$, ki pripada lastni vrednosti $\lambda = 0$ tudi lastni vektor matrike $\mathbf{Q}$, ki pripada lastni vrednosti $\mu = 1$. Poiščite $\mathbf{x}$.

Namig: Utemeljite, da je $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Rešitev: Naj bo $\mathbf{x}$ *lastni vektor, ki pripada lastne vrednosti* $\lambda = 0$. *Ugotovimo, da je* $\mathbf{x} = (2, -1, 2)$. *Ker je* $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ *dobimo*

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}$$

ali

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}\,.$$

Poleg tega je tudi

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

in zato

$$\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{x}\,.$$

Lastni vektor $\mathbf{x}$ *matrike* $\mathbf{A}$ *bo torej tudi lastni vektor* $\mathbf{Q}$.

Ocenjevanje:

- *Lastni vektor: 2 točki.*
- *Utemeljtev namiga: 2 točki.*
- *Vstavljanje v definicijo* $\mathbf{Q}$ *in prva poenostavitev: 2 točki.*
- *Druga poenostavitev: 2 točki.*
- *Sklep: 2 točki.*