FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

Pisni izpit

5. junij 2000

Ime in priimek: ______________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	a.	b.	Skupaj
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Zaporedja in limita.

a. (10) Zaporedje realnih števil je podano z rekurzijsko formulo

$$a_1 = 2 \qquad \text{in} \qquad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}\,.$$

Pokažite, da je zaporedje padajoče, ima limito in le-to izračunajte.

Rešitev: Vsi členi zaporedja so očitno pozitivni. Opazimo $a_2 = \sqrt{3} < a_1$. *Naprej dokazujemo z indukcijo. Če je* $a_n < a_{n-1}$, *je*

$$\sqrt{1 + a_n} < \sqrt{1 + a_{n-1}}\,,$$

torej $a_n \geq a_{n+1}$. *Ker je zaporedje pozitivno, je navzdol omejeno in ima limito* a. *Ta mora ustrezati enačbi*

$$a = \sqrt{1 + a}$$

ali

$$a^2 = 1 + a\,,$$

poleg tega pa je $a \geq 0$. *Sledi* $a = (1 + \sqrt{5})/2$.

Ocenjevanje:

- *Prvi korak indukcije: 2 točki.*
- *Indukcijski korak: 2 točki.*
- *Sklepanje o obstoju limite: 2 točki.*
- *Enačba za limito: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cosh(x)}{x \sinh(x)} \right).$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cosh(x)}{x \sinh(x)} \right) &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{\sinh x - x \cosh x}{x^2 \sinh x} \\
&= \lim_{x \downarrow 0} \frac{(\sinh x - x \cosh x)x}{x^3 \sinh x} \\
&= \lim_{x \downarrow 0} \frac{\sinh x - x \cosh x}{x^3} \\
&= \lim_{x \downarrow 0} \frac{-x \sinh x}{3x^2} \qquad L'Hospital \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Skupni imenovalec: 2 točki.*
- *Odprava* $\sinh x$ *v imenovalcu: 2 točki.*
- *L'Hospital: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & \text{za } x \neq 0 \\ 1 & \text{za } x = 0 \end{cases}$$

je neskončnokrat zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$.

a. (10) Naj bo

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} x^k$$

Taylorjev polinom n-te stopnje za $f(x)$ v $x_0 = 0$. Dokažite, da za $n \geq 2$ velja rekurzijska formula

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0\,,$$

pri čemer je $B_0 = 1$ in $B_1 = -1/2$.

Namig: Uporabite Leibnizovo formulo.

Rešitev: Najprej preverimo, da je $B_0 = 1$ in $B_1 = -1/2$. Za B_0 je trditev očitna, ker je

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1\,.$$

Za B_1 najprej izračunamo odvod $f(x)$ za $x \neq 0$. Dobimo

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}\,.$$

Izračunamo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1 - xe^x)x^2}{x^2(e^x-1)^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1 - xe^x)}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-xe^x}{2x} \qquad \textit{L'Hospital} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Za dokaz rekurzivne formule zapišemo

$$f(x)(e^x - 1) = x$$

in obe strani odvajamo n-krat, $n \geq 2$. Po Leibnizu dobimo

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)e^x + f^{(n)}(x)(e^x-1) = 0\,.$$

Vstavimo $x = 0$ in rekurzivna formula sledi.

Ocenjevanje:

- *Preverjanje za B_0: 2 točki.*

- *Preverjanje za B_1: 2 točki.*
- *Odvajanje po Leibnizu: 2 točki.*
- *Vstavljanje $x = 0$: 2 točki.*
- *Utemeljitev, da smo dobili rekurzivno formulo: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte četrti odvod funkcije $f(x)$ v točki $x_0 = 0$.

Rešitev: Odvodi funkcije $f(x)$ v točki $x = 0$ so kar B_k. Računamo

$$\binom{3}{2} B_2 + \binom{3}{1} B_1 + \binom{3}{0} B_0 = 0\,.$$

Sledi $3B_2 + 3B_1 + B_0 = 0$. Dobimo $B_2 = 1/6$. Nadaljujemo

$$\binom{4}{3} B_3 + \binom{4}{2} B_2 + \binom{4}{1} B_1 + \binom{4}{0} B_1 = 1\,.$$

Sledi $4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + B_0 = 0$ ali $B_3 = 0$. Nadaljujemo

$$\binom{5}{4} B_4 + \binom{5}{3} B_3 + \binom{5}{2} B_2 + \binom{5}{1} B_1 + \binom{5}{0} B_0 = 0\,.$$

Sledi $5B_4 + 10B_3 + 10B_2 + 5B_1 + B_0 = 0$ ali $B_4 = 1/30$. Sledi

$$f^{(4)}(0) = \frac{1}{30}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Spoznanje, da so B_k odvodi: 2 točki.*
- *Prva rekurzija: 2 točki.*
- *Druga rekurzija: 2 točki.*
- *Tretja rekurzija: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

3. (20) Integriranje:

a. (10) Izračunajte integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{(1+\cos x)^2}\,.$$

Rešitev: Možnosti je več. Zapišimo $\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)$. *Sledi* $(1+\cos x)^2 = 4\cos^4(x/2)$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{(1+\cos x)^2} &= \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{4\cos^4 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}u}{\cos^4 u} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{(1+\mathrm{tg}^2 u)\,\mathrm{d}u}{\cos^2 u} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{1} (1+v^2)\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Dvojni koti: 2 točki.*
- *Prva substitucija: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Druga substitucija: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Upoštevajte kot dano, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,.$$

Naj bo $\Phi(x) = \int_0^x e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$. Izračunajte

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2/2}\,\Phi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Rešitev: Najprej moramo opaziti, da je $\Phi'(x) = e^{-x^2/2}$. *Nato integriramo per partes.*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} x e^{-x^2/2}\,\Phi(x)\,\mathrm{d}x &= -e^{-x^2/2}\cdot\Phi(x)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\cdot e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad x = u/\sqrt{2} \\
&= \int_0^{\infty} e^{-u^2/2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev* $\Phi'(x) = e^{-x^2/2}$: *4 točke.*
- *Pravilni per partes: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Verhulstova diferencialna enačba, ki opisuje rast populacij, je oblike

$$y' = Ay - By^2 .$$

a. (10) Poiščite rešitev diferencialne enačbe pri začetnem pogoju $y(0) = \frac{A}{2B}$.

Rešitev: Enačbo najprej prepišemo v obliko

$$\frac{y'}{y(A - By)} = 1 .$$

Levo stran razstavimo na parcialne ulomke,

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{y'}{y} + \frac{B}{A} \cdot \frac{y'}{(A - By)} = 1 ,$$

integriramo

$$\frac{1}{A} \log(y) - \frac{1}{A} \log(A - By) = t + c$$

in iz začetnega pogoja določimo konstanto c tako, da vstavimo $y = A/2B$ in $t = 0$. Dobimo

$$c = \frac{1}{A} \log\left(\frac{A/2B}{(A - BA/2B)}\right) = \frac{1}{A} \log(1/B) .$$

Iz tega sledi

$$\log(\frac{y}{A - By}) = At + \log(1/B)$$

ali

$$\frac{y}{A - By} = \frac{e^{At}}{B} .$$

Izračunamo še y in dobimo

$$y(t) = \frac{Ae^{At}}{B(1 + e^{At})} .$$

Ocenjevanje:

- *Prepis enačbe v obliko za integriranje: 2 točki.*
- *Parcialni ulomki: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Določanje konstante: 2 točki.*
- *Končna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $A = B = 1$ in $y(0) = 1/4$. V kolikšnem času se bo populacija podvojila? Iščemo čas t, ko bo $y(t) = 1/2$.

Rešitev: Iz a. ugotovimo, da je $c = \log(1/3)$, torej

$$\log\left(\frac{y}{1 - y}\right) = t + \log(1/3) .$$

Ko je $y = 1/2$, dobimo

$$\log(1) = t + \log(1/3) ,$$

od koder sledi $t = \log 3$.

Ocenjevanje:

- *Določitev konstante: 3 točke.*
- *Enačba za t: 3 točke.*
- *Pravilno vstavljanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Naj bodo **a**, **b**, **c** in **d** poljubni vektorji.

a. (10) Pokažite, da je

$$(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{a} - (\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{b} + (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{d} = 0\,.$$

Namig: Zapišite $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$ *na dva načina.*

Rešitev: Napišimo najprej

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= (\mathbf{a},\mathbf{c}\times\mathbf{d})\mathbf{b} - (\mathbf{b},\mathbf{c}\times\mathbf{d})\mathbf{a}\\ &= (\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{b} - (\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})\mathbf{a}\end{aligned}$$

Ker je

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = -(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,,$$

je tudi

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= -(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\\ &= -(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{d} + (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d})\mathbf{c}\end{aligned}$$

Če izenačimo zgornja izraza, dobimo želeno enakost.

Ocenjevanje:

- *Prvi razvoj vektorskega produkta: 2 točki.*
- *Vrstni red v mešanih produktih: 2 točki.*
- *Drugi razvoj vektorskega produkta: 2 točki.*
- *Vrstni red v mešanih produktih: 2 točki.*
- *Končni sklep: 2 točki.*

b. (10) Pokažite še, da je

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{d}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{d})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0\,.$$

Rešitev: Uporabimo Lagrangeovo enakost in dobimo

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{d}) - (\mathbf{a},\mathbf{d})(\mathbf{b},\mathbf{c})\,.$$

Podobno dobimo

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{c},\mathbf{d}) - (\mathbf{a},\mathbf{d})(\mathbf{b},\mathbf{c})$$

in

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{d})\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{b})(\mathbf{c},\mathbf{d}) - (\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{d})\,.$$

Enakost sledi.

Ocenjevanje:

- *Ideja z Lagrangeovo identiteto: 2 točki.*
- *Prva uporaba: 2 točki.*
- *Druga uporaba: 2 točki.*
- *Tretja uporaba: 2 točki.*
- *Končni sklep: 2 točki.*

6. (20) Naj bosta $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ kvadratni matriki in predpostavite, da sta $\mathbf{A}$ in $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ obrnljivi.

a. (10) Pokažite, da je

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} = (\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} &= (\mathbf{A}(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}))^{-1}\mathbf{B}\\ &= (\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z izpostavljanjem* $\mathbf{A}$*: 6 točk.*
- *Inverz produkta: 4 točke.*

b. (10) Pokažite, da je vsak lastni vektor matrike $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, ki pripada lastni vrednosti $\lambda \neq -1$ lastni vektor matrike $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$, ki pripada lastni vrednosti $\lambda/(1+\lambda)$.

Rešitev: Označimo $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}$ *in naj bo* $\mathbf{x}$ *lastni vektor* $\mathbf{C}$*, ki pripada lastni vrednosti* λ*. Računamo*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x} = (\mathbf{I}+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{x} = (\mathbf{I}+\mathbf{C})^{-1}\lambda\mathbf{x}\,.$$

Ker je $(\mathbf{I}+\mathbf{C})\mathbf{x} = (1+\lambda)\mathbf{x}$*, mora biti*

$$\mathbf{x} = (1+\lambda)(\mathbf{I}+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{x}$$

ali

$$(\mathbf{I}+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{1+\lambda}\mathbf{x}\,,$$

torej

$$(\mathbf{I}+\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{x} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{x}\,.$$

Ocenjevanje:

- $\mathbf{C}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$*: 4 točk.*
- *Ideja, da je* $\mathbf{x}$ *lastni vektor* $(\mathbf{I}+\mathbf{C})^{-1}$*: 4 točk.*
- *Končni sklep: 2 točk.*