FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

Pisni izpit

24. junij 2002

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** ☐☐☐☐☐☐☐☐

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

REŠITVE

1. (20) Limite:

a. (10) Zaporedje realnih števil $x_1, x_2, \ldots$ je podano z rekurzijsko formulo

$$x_1 = 2 \qquad \text{in} \qquad x_{n+1} = (e-1)\log(x_n) + 1\,.$$

Dokažite z matematično indukcijo, da je $1 \leq x_n \leq e$ za vse $n \geq 1$. Dokažite, da zaporedje $x_1, x_2, \ldots$ ima limito in jo izračunajte.

Namig: $0 \leq \log(x) \leq 1$ *in* $(e-1)\log(x) > x - 1$ *za* $1 \leq x \leq e$.

Rešitev: Dokažimo najprej, da je $1 \leq x_n \leq e$ *za vse* n*. Trditev drži za* $n = 1$*. Recimo, da je* $1 \leq x_n \leq e$*. Potem je* $log x_n > 0$ *in zato* $x_{n+1} > 1$*. Ker je* $x_n < e$*, je* $\log x_n < 1$*, zato je*

$$x_{n+1} < (e-1) + 1 = e\,.$$

Pokažimo, da je zaporedje naraščajoče. Iz namiga sledi, da je

$$x_{n+1} = (e-1)\log(x_n) + 1 > x_n - 1 + 1 = x_n\,.$$

Zaporedje je monotono in omejeno, zato ima limito. Označimo limito z a*. Ustrezati mora enačbi*

$$a = (e-1)\log a + 1\,.$$

Brz ugotovimo, da število $a = e$ *reši enačbo.*

Ocenjevanje:

- *Prva indukcija: 2 točki.*
- *Naraščanje: 2 točki.*
- *Dokaz monotonosti: 2 točki.*
- *Enačba za limito: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte

$$\lim_{x \downarrow 0} (1 + \sin x)^{\mathrm{ctg} x}\,.$$

Rešitev: Izračunamo limito logaritma zgornjega izraza. Dobimo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \downarrow 0} \log\left((1+\sin x)^{\mathrm{ctg} x}\right) &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} \log(1 + \sin x) \\
&= \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{\sin x} \log(1 + \sin x) \\
&= \lim_{x \downarrow 0} \frac{\cos x}{\cos x (1 + \sin x)} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$\lim_{x \downarrow 0} (1 + \sin x)^{\mathrm{ctg} x} = e\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z logaritmom: 2 točki.*
- *Izvedba ideje: 2 točki.*
- *L'Hospitalovo pravilo: 2 točki.*
- *Limita logaritma: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Funkcija $f(x)$ naj bo dana z

$$f(x) = (2-x)^{-m},$$

kjer je $m > 1$ celo število.

a. (10) Pokažite, da je

$$\frac{(2-x)}{m} \cdot f'(x) = f(x)$$

in sklepajte, da velja

$$\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = \frac{(m+n)}{2(n+1)} \cdot \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

za $n = 0, 1, \ldots$.

Rešitev: Z odvajanjem dobimo

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(2-x)^{-m-1} \\ &= \frac{m}{(2-x)} \cdot (2-x)^{-m} \\ &= \frac{m}{(2-x)} \cdot f(x). \end{aligned}$$

Za rekurzivno enačbo odvajamo levo in desno stran enačbe

$$\frac{(2-x)}{m} \cdot f'(x) = f(x)$$

n-krat, uporabimo Leibnizovo pravilo in vstavimo $x = 0$. Dobimo

$$\frac{2}{m} f^{(n+1)}(0) - n\frac{1}{m} f^{(n)}(0) = f^{(n)}(0).$$

Delimo z $(n+1)!$ in preuredimo. Sledi

$$\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} = \frac{(m+n)}{2(n+1)} \cdot \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Ocenjevanje:

- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Preureditev: 2 točki.*
- *Leibniz: 2 točki.*
- *Vstavljanje $x = 0$: 2 točki.*
- *Preureditev in rezultat: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da je za $|x| < 2$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} 2^{-(m+n)} x^n.$$

Namig: Izračunajte prvih nekaj koeficientov.

Rešitev: Naj bo c_k koeficient pri potenci x^k v Taylorjevi vrsti za $f(x)$. Rekurzivna formula v a. nam da

$$c_{n+1} = \frac{(m+n)}{2(n+1)} \cdot c_n \,.$$

Vemo, da je $c_0 = f(0) = 2^{-m}$. Izračunajmo nekaj členov.

$$c_1 = \frac{m}{2} \cdot 2^{-m} = m 2^{-m-1}\,,$$

$$c_2 = \frac{m+1}{2\cdot 2} \cdot c_1 = \frac{m(m+1)}{2} \cdot 2^{-m-2}\,,$$

$$c_3 = \frac{m+2}{2\cdot 3} \cdot c_2 = \frac{m(m+1)(m+2)}{2\cdot 3} \cdot 2^{-m-3} \qquad \ldots$$

Vzorec koeficientov je razviden. Taylorjeva vrsta predstavlja funkcijo, saj so koeficienti vsi pozitivni (Bernsteinov izrek).

Ocenjevanje:

- c_0: *2 točki.*
- c_1: *2 točki.*
- c_2: *2 točki.*
- *Vzorec: 2 točki.*
- *Utemeljitev konvergence: 2 točki.*

3. (20) Integriranje:

a. (10) Izračunajte

$$\int_1^e x \log^2 x \,\mathrm{d}x\,.$$

Rešitev: Postavimo $f(x) = x$ *in* $G(x) = \log^2 x$. *Z integracijo per partes integral preide v*

$$\begin{aligned}
\int_1^e x\log^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\cdot\log^2 x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^2}{2} - \int_1^e x\log x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^2}{2} - \Big(\frac{x^2}{2}\log x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{x^2}{4}\Big|_1^e \\
&= \frac{1}{4}(e^2-1)
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Prva izbira F in g: 2 točki.*
- *Prvo integriranje: 2 točki.*
- *Prva izbira F in g: 2 točki.*
- *Drugo integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točke.*

b. (10) Pokažite, da za $a > 0$ velja

$$\int_0^1 \frac{e^{-a/x}}{\sqrt{x^3(1-x)}}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-a}\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,.$$

Uporabite kot znano, da je $\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

Namig: Začnite z $1/x = u$.

Rešitev: Uvedemo novo spremenljivko $1/x = u$, *torej* $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/u^2$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{e^{-a/x}}{\sqrt{x^3(1-x)}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^\infty \frac{e^{-au}}{\sqrt{u-1}}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-a(1+v)}}{\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v \qquad \textit{nova spremenljivka } u-1=v \\
&= \frac{e^{-a}}{\sqrt{a}}\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \textit{nova spremenjivka } av=t \\
&= \frac{e^{-a}\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nova spremenljivka na prvem koraku: 2 točki.*
- *Meje in parvilna uvedba nove spremenljivke: 2 točki.*
- *Druga nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Tretja nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Upoštevanje znanega rezultata: 2 točki.*

4. (20) Označimo z $x(t)$ koncentracijo dušikovega dioksida v zraku. Ta nastaja iz dušikovega oksida in kisika, pri $25°c$ pa opisuje potek koncentracije diferencialna enačba

$$\dot{x} = k(\alpha - x)^2(\beta - x)\,,$$

kjer je k konstanta, α začetna koncentracija dušikovega oksida in β dvakrat začetna koncentracija kisika. Predpostavljamo, da je $\alpha < \beta$.

a. (10) Pokažite, da splošna rešitev enačbe zadošča

$$\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\left(\log\left(\frac{\alpha - x}{\beta - x}\right) + \frac{\beta-\alpha}{\alpha - x}\right) = k(t+c)\,,$$

kjer je c konstanta, ki jo je potrebno še določiti.

Rešitev: Enačbo prepišemo v

$$\frac{\dot{x}}{(\alpha - x)^2(\beta - x)} = k\,.$$

Za rešitev bomo morali integrirati levo stran. Integrand razcepimo na parcialne ulomke z nastavkom

$$\frac{A}{\alpha - x} + \frac{B}{(\alpha - x)^2} + \frac{C}{\beta - x} = \frac{1}{(\alpha - x)^2(\beta - x)}\,.$$

Zmnožimo in izenačimo koeficiente pri enakih potencah x. Dobimo enačbe

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha\beta A + B\beta + C\alpha^2 \\ 0 &= (-\alpha-\beta)A - B - 2\alpha C \\ 0 &= A + C \end{aligned}$$

Če že začetno enačbo množimo z $(\beta - x)$ in pogledamo limito, ko $x \to \beta$, dobimo

$$C = \frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\,.$$

Sledi

$$A = -\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}$$

in

$$B = \frac{1}{\beta-\alpha}\,.$$

Torej je

$$\begin{aligned} &\int \frac{\mathrm{d}x}{(\alpha - x)^2(\beta - x)} \\ &= \frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\int\left(-\frac{1}{\alpha - x} + \frac{\beta-\alpha}{(\alpha - x)^2} + \frac{1}{\beta - x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\left(\log\left(\frac{\alpha - x}{\beta - x}\right) + \frac{\beta-\alpha}{\alpha - x}\right) \\ &= k(t+c) \end{aligned}$$

za neko konstanto c.

Ocenjevanje:

- *Prepis enačbe v obliko za integriranje: 2 točki.*
- *Nastavek za parcialne ulomke: 2 točki.*
- *Enačbe za koeficiente: 2 točki.*
- *Integrali posameznih kosov: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

b. (10) Recimo, da je na začetku $x(0) = 0$. V kolikšnem času bo koncentracija dušikovega dioksida narasla na $\alpha/2$?

Rešitev: Označimo iskani čas s T. Iz začetnega pogoja dobimo enačbo

$$\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\left(\log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\frac{\beta-\alpha}{\alpha}\right)=kc\,,$$

čas T pa mora ustrezati enačbi

$$\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\left(\log\left(\frac{\alpha/2}{\beta-\alpha/2}\right)+\frac{\beta-\alpha}{\alpha/2}\right)=k(T+c)\,.$$

Odštejemo prvo enačbo od druge in dobimo

$$kT=\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\left(\log\left(\frac{\beta}{2\beta-\alpha}\right)+\frac{\beta-\alpha}{\alpha}\right)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Kam bi del začetni pogoj?: 2 točki.*
- *Enačba za c: 2 točki.*
- *Kam bi del $\alpha/2$?: 2 točki.*
- *Enačba za T: 2 točki.*
- *Izračun T: 2 točki.*

5. (20) Naj bodo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ in $\mathbf{d}$ vektorji v prostoru.

a. (10) Dokažite, da je

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{a}\,.$$

Rešitev: Uporabimo enakost

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = -(\mathbf{y}, \mathbf{z})\,\mathbf{x} + (\mathbf{x}, \mathbf{z})\,\mathbf{y}\,.$$

Sledi

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{c} \times \mathbf{d})\,\mathbf{a} + (\mathbf{a}, \mathbf{c} \times \mathbf{d})\,\mathbf{b}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Enakost: 2 točki.*
- *Izbira* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$: *2 točki.*
- *Pravilna uporaba enakosti: 2 točki.*
- *Vrstni red v mešanem produktu: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Naj bodo dani vektorji

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiščite vektor $\mathbf{x}$, ki leži v ravnini, ki jo napenjata vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$, je pravokoten na $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ in je $(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = 1$.

Rešitev: Vektor

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{a}$$

zadošča pogoju, da je v ravnini, ki jo napenjata $\mathbf{a}$ *in* $\mathbf{b}$ *in je pravokoten na* $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$. *Torej bo*

$$\mathbf{x} = \lambda[(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{a}]$$

za nek koeficient λ. *Množimo še skalarno z* $\mathbf{b}$. *Dobimo enačbo*

$$1 = (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = \lambda[(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})(\mathbf{a}, \mathbf{b})]\,.$$

Sledi

$$\lambda = \frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})(\mathbf{a}, \mathbf{b})}\,.$$

Končno izračunamo

$$(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = -1 \qquad \textit{in} \qquad (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = -1\,.$$

Sledi

$$\lambda = \frac{1}{-2+1} = -1$$

in

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek: 2 točki.*
- *Mešana produkta: 2 točki.*
- *Skalarno množenje z* $\mathbf{b}$: *2 točki.*
- λ: *2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

6. (20) Dana naj bo matrika

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Izračunajte lastne vrednosti matrike $\mathbf{A}$.

Rešitev: Karakteristični polinom izračunamo po Sarrusovem pravilu. Zapišemo

$$\begin{array}{rrrrr} -2-\lambda & 2 & -3 & -2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda & -6 & 2 & 1-\lambda \\ -1 & -2 & -\lambda & -1 & -2 \end{array}$$

Dobimo

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (2+\lambda)(1-\lambda)\lambda + 12 + 12 - 3(1-\lambda) + 12(2+\lambda) + 4\lambda \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 \\ &= -(\lambda+3)^2(\lambda-5) \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek za determinanto: 2 točki.*
- *Sarrusovo pravilo: 2 točki.*
- *Preurejanje: 2 točki.*
- *Prva ničla: 2 točki.*
- *Druga ničla: 2 točki.*

b. (10) Ali ima matrika $\mathbf{A}$ tri neodvisne lastne vektorje? V primeru, da jih ima, jih poiščite.

Rešitev: Vemo, da lastni vrednosti $\lambda = 5$ pripada lastni vektor $\mathbf{x}$, ki mora zadoščati sistemu enačb

$$\begin{array}{rcrcrcr} -7x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Izberimo si recimo $x_3 = -1$. Enačbe se poenostavijo v

$$\begin{array}{rcrcr} -7x_1 & + & 2x_2 & = & -3 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & = & -6 \end{array}$$

Rešitev je $\mathbf{x} = (1, 2, -1)$. Prepričati se moramo še, da lastni vrednosti $\lambda = -3$ pripadata dva linearno neodvisna lastna vektorja. To je enako kot pokazati, da ima matrika $\mathbf{A} + 3\mathbf{I}$ rang 1. Uporabimo Gaussov postopek

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ko iščemo lastna vektorja $\mathbf{y}$ in $\mathbf{z}$, ki pripadata lastni vrednosti $\lambda = -3$, si zadnji dve komponenti poljubno izberemo. Izberimo najprej, da sta 1 in 0. Dobimo $\mathbf{y} = (-2, 1, 0)$. Izberimo še, da sta zadnji komponenti 0 in 1. Dobimo $\mathbf{z} = (3, 0, 1)$

Ocenjevanje:

- *Lastni vektor, ki pripada $\lambda = 5$: 2 točki.*
- *Ugotovitev, da mora biti rang $\mathbf{A} + 3\mathbf{I}$ enak 1: 2 točki.*
- *Drugi lastni vektor: 2 točki.*
- *Tretji lastni vektor: 2 točki.*
- *Utemeljitev, da so vsi lastni vektorji neodvisni: 2 točki.*