FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

Pisni izpit

10. junij 2002

Ime in priimek: ____________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Limite.

a. (10) Zaporedje naj bo dano z rekurzivno formulo

$$a_1 = 1 \qquad \text{in} \qquad a_{n+1} = \sqrt{3a_n}\,.$$

Pokažite, da je zaporedje omejeno s 3 in naraščajoče. Sklepajte, da je zaporedje konvergentno in izračunajte njegovo limito.

Rešitev: Omejenost dokažemo z matematično indukcijo. Po definiciji je $a_1 < 3$. Recimo, da je $a_n < 3$. Potem je

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n} < \sqrt{3 \cdot 3} = 3\,.$$

Po matematični indukciji neenačba velja za vse n. Za dokaz monotonosti opazimo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{3}{a_n}} > 1\,,$$

ker je $a_n < 3$. Zaporedje torej narašča. Označimo

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

Limita zaporedja mora ustrezati enačbi

$$a = \sqrt{3a}\,.$$

Ta enačba ima rešitvi $a = 0$ in $a = 3$. V poštev pride le $a = 3$.

Ocenjevanje:

- *Indukcijska predpostavka: 2 točki.*
- *Omejenost: 2 točki.*
- *Indukcijska predpostavka: 2 točki.*
- *Monotonost: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)\,.$$

Rešitev: Upoštevali bomo, da je

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = 1\,,$$

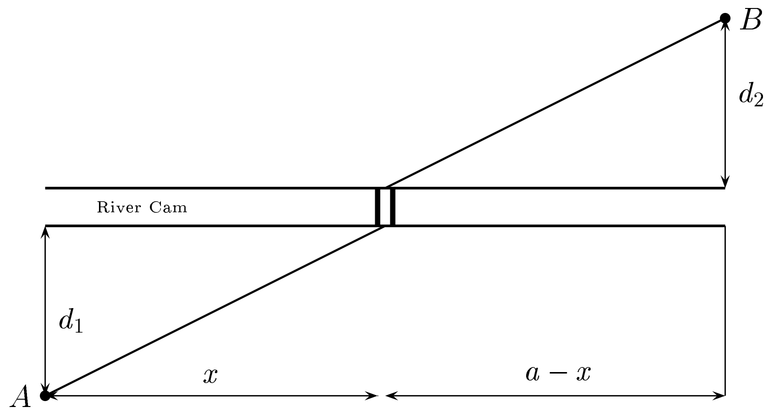
kar takoj sledi iz L'Hospitalovega pravila. Računamo po L'Hospitalu

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right)\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x\log x - (x-1)}{(x-1)\log x}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x\log x - (x-1)}{(x-1)^2}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\log x}{2(x-1)}\\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Skupni imenovalec: 2 točki.*
- *Poenostavitev imenovalca: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Preverjanje predpostavk za L'Hospitala: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Med mestoma A in B želimo speljati cesto. Cesta je lahko ravna, le reko, ki teče med A in B, mora most prečkati pravokotno. Po ravnem delu ceste se lahko peljemo s hitrostjo c_1, na mostu pa s hitrostjo c_2. Dolžina mosta je d, oddaljenost mesta A od reke je d_1, oddaljenost mesta B od reke pa d_2. V vodoravni smeri sta mesti oddaljeni a.



a. (10) Izračunajte čas, ki ga porabimo za vožnjo med A in B kot funkcijo koordinate x položaja mosta. Nato se prepričajte, da bo čas najmanjši, ko bosta obe cesti z reko oklepali enak kot.

Rešitev: Razdalja med A in mostom je $\sqrt{d_1^2+x^2}$, *razdalja med B in mostom je* $\sqrt{d_2^2+(a-x)^2}$, *most pa je dolžine* d. *Glede na dane hitrosti bo celoten čas enak*

$$T(x)=\frac{\sqrt{d_1^2+x^2}}{c_1}+\frac{d}{c_2}+\frac{\sqrt{d_2^2+(a-x)^2}}{c_1}.$$

Odvajamo po x. *Dobimo*

$$T'(x)=\frac{x}{c_1\sqrt{d_1^2+x^2}}-\frac{(a-x)}{c_1\sqrt{d_2^2+(a-x)^2}}.$$

Minimum bo dosežen, ko bo odvod enak 0. *Z nekaj računanja je ta zahteva enaka*

$$\frac{x}{\sqrt{d_1^2+x^2}}=\frac{(a-x)}{\sqrt{d_2^2+(a-x)^2}}.$$

Na levi in desni pa sta ravno kosinusa kotov, ki ju cesti oklepata s smerjo reke. Kota morata biti torej enaka.

Ocenjevanje:

- *Razdalja A in B do mosta: 2 točki.*
- *Časa od A in B do mosta: 2 točki.*
- *Celoten čas: 2 točki.*
- *Odvod: 2 točki.*
- *Enakost kotov: 2 točki.*

b. (10) Poiščite x, za katerega bo čas najmanjši in se prepričajte, da ste res našli minimum.

Rešitev: Če reko stisnemo na širino 0*, se bosta cesti "staknili". Pri optimalnem* x *bo kot enak in bomo dobili pravokotni trikotnik s katetama* a *in* d_1+d_2*. Izenačimo tangense (ali pa se spomnimo na starega Talesa) in dobimo enačbo*

$$\frac{d_1}{x}=\frac{d_1+d_2}{a}\,.$$

Sledi

$$x=a\cdot\frac{d_1}{d_1+d_2}\,.$$

Potebujemo še drugi odvod funkcije $T(x)$ *iz a. Z odvajanjem dobimo*

$$T''(x)=\frac{d_1^2}{c_1(d_1^2+x^2)^{3/2}}+\frac{d_2^2}{(d_2^2+(a-x)^2)^{3/2}}\,.$$

Drugi odvod je povsod pozitiven, kar pomeni, da je funkcija konveksna. S tem smo tudi pokazali, da smo našli minimum.

Ocenjevanje:

- *Pravokotni trikotnik: 2 točki.*
- *Tales: 2 točki.*
- x*: 2 točki.*
- *Drugi odvod: 2 točki.*
- *Konveksnost in sklep: 2 točki.*

3. (20) Integriranje:

a. (10) S pomočjo integracije *per partes* izračunajte

$$\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^4 x \,\mathrm{d}x \,.$$

Rešitev: Računamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^4 x \,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \cdot \sin^3 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sin^3 x}{3\cos^3 x}\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} - \left(\frac{\sin x}{\cos x}\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Izbira F: 2 točki.*
- *Izbira g: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Z uvedbo nove spremenljivke izračunajte

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x}\,.$$

Rešitev: Uporabimo novo spremenljivko $e^x = u$, *torej* $e^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} &= \int_1^{\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{u(u+\frac{1}{u})} \\
&= 2\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} \\
&= 2\mathrm{arctg}(u)\Big|_1^{\infty} \\
&= \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Pretvorba funkcije: 2 točki.*
- *Meje: 2 točki.*
- *Nedoločeni integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Med točkama A in B na površju zemlje skopljemo raven predor dolžine $2d$ in vanj položimo tirnice, po katerih lahko pelje vlak brez trenja. Naj bo $x(t)$ razdalja vlaka od sredine predora v trenutku t. Ko je vlak v točki A, je ta razdalja $-d$. Gibanje vlaka pod vplivom težnosti opisuje diferencialna enačba

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{4\pi\rho k}{3}} \cdot \sqrt{d^2 - x^2}\,,$$

kjer je ρ masna gostota zemlje in k gravitacijska konstanta.

a. (10) Naj bo $x(0) = -d$. Poiščite rešitev diferencialne enačbe.

Rešitev: Enačbo najprej prepišemo v obliko

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{d^2 - x^2}} = \alpha\,,$$

kjer je

$$\alpha = \sqrt{\frac{4\pi\rho k}{3}}\,.$$

Integriramo in dobimo

$$\arcsin(x/d) = \alpha t + c\,.$$

Iz začetnega pogoja sledi

$$\arcsin(-1) = c\,,$$

torej $c = -\pi/2$. *Sledi*

$$\frac{x}{d} = \sin(\alpha t - \frac{\pi}{2})\,,$$

torej

$$x(t) = -d\cos(\alpha t)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Pretvorba na obliko za integriranje: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Enačba za konstanto: 2 točki.*
- *Konstanta: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

b. (10) Ker predpostavljamo, da ni trenja, bo vlak sam od sebe peljal od točke A do točke B. Izračunajte čas, ki je za to potreben.

Rešitev: Iz a. preberemo, da je

$$\arcsin(x/d) = \alpha t - \frac{\pi}{2}\,.$$

Ko bo vlak na sredi predora, bo $x = 0$. *Razberemo, da za to potreben čas zadošča enačbi*

$$\alpha t = \frac{\pi}{2}\,.$$

torej je

$$t = \frac{\pi}{2\alpha}\,.$$

Čas od sredine predora do točke B *bo enak času od* A *do sredine predora. Sledi, da je potreben čas* π/α.

Ocenjevanje:

- *Ideja, kako razbrati čas: 2 točki.*
- *Uporaba a.: 2 točki.*
- *Enačba za t: 2 točki.*
- *Utemeljitev, da je čas do sredine enak ostanku časa: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

5. (20) Naj bo dan enotski vektor $\mathbf{e}$ v prostoru in kot $\alpha \in [0, \pi)$.

a. (10) Naj bo $\mathbf{x}$ vektor pravokoten na $\mathbf{e}$ in $\mathbf{y}$ vektor, ki ga dobimo tako, da $\mathbf{x}$ zasučemo okrog osi $\mathbf{e}$ za kot α in velja $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}) > 0$. Pokažite, da je

$$\mathbf{y} = \cos\alpha\, \mathbf{x} + \sin\alpha\, (\mathbf{e} \times \mathbf{x})$$

Rešitev: Vektor $\mathbf{y}$ *leži v ravnini pravokotni na* $\mathbf{e}$. *To ravnino napenjata vektorja* $\mathbf{x}$ *in* $\mathbf{e} \times \mathbf{x}$, *torej je*

$$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} + \mu(\mathbf{e} \times \mathbf{x})\,.$$

Poiskati moramo koeficienta λ *in* μ. *Množimo najprej enačbo skalarno z* $\mathbf{x}$. *Ker je* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \cos\alpha$ *(vektorja sta enotska!), je*

$$\cos\alpha = \lambda\,.$$

Upoštevali smo, da je $(\mathbf{e} \times \mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$. *Množimo še skalarno z* $\mathbf{y}$. *Dobimo*

$$1 = \cos^2\alpha + \mu(\mathbf{e}, \mathbf{x}, \mathbf{y})\,.$$

Upoštevamo $(\mathbf{e}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}) = \sin\alpha$. *Sledi*

$$1 - \cos^2\alpha = \mu \sin\alpha$$

ali $\mu = \sin\alpha$. *Formula trivialno drži za* $\alpha = 0$.

Ocenjevanje:

- *Zapis z linearno kombinacijo: 2 točki.*
- *Množenje z* $\mathbf{x}$*: 2 točki.*
- λ*: 2 točki.*
- *Množenje z* $\mathbf{y}$*: 2 točki.*
- μ*: 2 točki.*

b. (10) Naj bo zdaj $\mathbf{x}$ poljuben vektor in $\mathbf{y}$ vektor, ki ga dobimo tako, da $\mathbf{x}$ zasučemo za kot α okrog osi $\mathbf{e}$ in bo $(\mathbf{e}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$. Izračunajte $\mathbf{y}$.

Namig: Zapišite

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{e} + \mathbf{x}'$$

tako, da bo $\mathbf{x}'$ *pravokoten na* $\mathbf{e}$.

Rešitev: Vektor $\lambda\mathbf{e}$ *bo pravokotna projekcija vektorja* $\mathbf{x}$ *na* $\mathbf{e}$, *torej*

$$\lambda \mathbf{e} = (\mathbf{x}, \mathbf{e})\, \mathbf{e}\,.$$

Sledi

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{e})\, \mathbf{e}\,.$$

Ko zasučemo $\mathbf{x}$, *se zasuče le komponenta* $\mathbf{x}$ *pravokotna na* $\mathbf{e}$. *Upoštevamo a. in sledi*

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= (\mathbf{x}, \mathbf{e})\, \mathbf{e} + \cos\alpha\, \mathbf{x}' + \sin\alpha\, (\mathbf{e} \times \mathbf{x}') \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{e})\, \mathbf{e} + \cos\alpha\, (\mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{e})\, \mathbf{e}) + \sin\alpha\, (\mathbf{e} \times \mathbf{x})\,, \end{aligned}$$

ker je $\mathbf{e} \times \mathbf{x}' = \mathbf{e} \times \mathbf{x}$. *Zlahka preverimo, da je* $(\mathbf{e}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$.

Ocenjevanje:

- *Zapis z linearno kombinacijo: 2 točki.*
- λ*: 2 točki.*
- *Opazka, da se zasuče le* $\mathbf{x}'$*: 2 točki.*
- *Zapis zasukanega* $\mathbf{x}'$*: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

6. (20) Dana naj bo matrika

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \beta \\ \beta & -\alpha-\beta \end{pmatrix}.$$

a. (10) Poiščite lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $\mathbf{A}$.

Rešitev: Karakteristični polinom je

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2(\alpha+\beta)\lambda + \alpha^2 + 2\alpha\beta$$

z ničlama

$$\lambda_1 = -\alpha \qquad in \qquad \lambda_2 = -\alpha - 2\beta\,.$$

Pripadajoča lastna vektorja sta $\mathbf{x}_1 = (1,1)$ *in* $\mathbf{x}_2 = (1,-1)$.

Ocenjevanje:

- *Determinanta: 2 točki.*
- *Karakteristični polinom: 2 točki.*
- *Ničli: 2 točki.*
- *Prvi lastni vektor: 2 točki.*
- *Drugi lastni vektor: 2 točki.*

b. (10) Naj bo

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Pokažite, da je

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha-2\beta \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1}$$

in uporabite to enakost za izračun $\mathbf{A}^n$ za poljuben $n \geq 0$.

Rešitev: Najprej ugotovimo, da je

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

torej je matrika inverzna sama sebi. Enakost dokažemo tako, da matrike preprosto zmnožimo. Označimo

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha-2\beta \end{pmatrix}.$$

Potenco izračunamo kot

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^n &= (\mathbf{Q\Lambda Q}^{-1})^n \\
&= \mathbf{Q\Lambda Q}^{-1} \cdot \mathbf{Q\Lambda Q}^{-1} \cdots \mathbf{Q\Lambda Q}^{-1} \\
&= \mathbf{Q\Lambda}^n\mathbf{Q}^{-1} \\
&= \mathbf{Q} \begin{pmatrix} (-\alpha^n) & 0 \\ 0 & (-\alpha-2\beta)^n \end{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}((-\alpha)^n + (-\alpha-2\beta)^n) & \frac{1}{2}((-\alpha)^n - (-\alpha-2\beta)^n) \\ \frac{1}{2}((-\alpha)^n - (-\alpha-2\beta)^n)) & \frac{1}{2}((-\alpha)^n + (-\alpha-2\beta)^n) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Inverz* $\mathbf{Q}$*: 2 točki.*
- *Preverjanje enakosti: 2 točki.*
- *Ideja s krajšanjem: 2 točki.*
- *Potenca diagonalne matrike: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*