FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

Pisni izpit

29. junij 2004

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Zaporedja in limite.

a. (10) V modelu za rast populacij definiramo zaporedje $x_0, x_1, \ldots$ s predpisom $x_0 = 1/4$ in

$$x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n)\,.$$

Pokažite, da velja $0 \leq x_n \leq 1/2$ za vsak n. Pokažite, da je zaporedje monotono in sklepajte, da ima limito. Izračunajte limito.

Namig: Za $0 \leq x \leq 1$ je $x(1-x) \leq 1/4$.

Rešitev: Najprej pokažimo, da je $0 \leq x_n \leq 1/2$ za vse n. Sklepamo po indukciji. Trditev velja za x_0. Recimo, da trditev velja za n. Očitno je $x_{n+1} \geq 0$, po drugi strani pa je z upoštevanjem namiga $x_{n+1} \leq 2/4$. Ker je $x_1 > x_0$, predvidevamo, da je zaporedje naraščajoče. Za dokaz opazimo, da je $2(1 - x_n) \geq 1$ za vse n, saj je vedno $1 - x_n \geq 1/2$. Potem je očitno $x_{n+1} \geq x_n$. Sklepamo, da zaporedje ima limito x. Ta mora ustrezati enačbi $x = 2x(1-x)$. Pozitivna rešitev te enačbe je $x = 1/2$.

Ocenjevanje:

- *Omejenost: 2 točki.*
- *Ideja, da je naraščajoče: 2 točki.*
- *Dokaz: 2 točki.*
- *Sklep, da limita obstaja: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right).$$

Rešitev: Uvedimo novo spremenljivko $u = 1/x$. Računamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^2 \left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right) &= \lim_{u\downarrow 0} \left(\frac{1}{u^2}\right)\left(\log(1+u) - \frac{u}{1+u}\right) \\
&= \lim_{u\downarrow 0} \left(\frac{1}{2u}\right)\left(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2}\right) \\
&= \lim_{u\downarrow 0} \left(\frac{1}{2u}\right)\frac{u}{(1+u)^2} \\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Prepis: 2 točki.*
- *Preverjanje predpostavk za L'Hospitalovo pravilo: 2 točki.*
- *Odvajanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sinh x} & \text{za } x \neq 0 \\ 1 & \text{za } x = 0, \end{cases}$$

je neskončnokrat zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$.

a. (10) Označite $F_0 = 1$ in

$$F_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

za vse $n \geq 1$. Pokažite, da velja

$$\frac{F_0}{(2n-1)!} + \frac{F_2}{(2n-3)!} + \cdots + \frac{F_{2n-2}}{1!} = 0\,.$$

Rešitev: Označimo $g(x) = \sinh x$*. Po definiciji je* $f(x)g(x) = x$*. Za* $n \geq 2$ *odvajamo produkt* $(2n-1)$*-krat. Po Leibnizovem pravilu dobimo*

$$0 = (f(x)g(x))^{(2n-1)}|_{x=0} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} f^{(k)}(0) g^{(2n-k-1)}(0)\,.$$

Upoštevamo, da so lihi odvodi funkcije $g(x)$ *enaki* $\cosh x$*, sodi odvodi pa so enaki* $\sinh x$*. Sledi*

$$0 = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2l} f^{(2l)}(0) g^{(2n-2l-1)}(0) = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2l} f^{(2l)}(0)\,.$$

Enačbo delimo z $(2n-1)!$ *in dobimo*

$$\sum_{l=0}^{n-1} \frac{F_{2l}}{(2n-2l-1)!} = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z Leibnizom: 2 točki.*
- *Odvodi* $\sinh x$*: 2 točki.*
- *Upoštevanje lihosti v formuli: 2 točki.*
- *Krajšanje: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte $f^{(5)}(0)$ in $f^{(6)}(0)$.

Rešitev: Funkcija f *je soda, zato so vsi lihi odvodi enaki* 0*. Sledi* $f^{(5)}(0) = 0$*. Za* $f^{(6)}(0)$ *uporabimo rekurzivno formulo iz a. dela naloge. Velja*

$$\frac{F_0}{7!} + \frac{F_2}{5!} + \frac{F_4}{3!} + \frac{F_6}{1!} = 0\,.$$

Potrebujemo torej F_2 *in* F_4*. Računamo po vrsti.*

$$\frac{F_0}{3!} + \frac{F_2}{1!} = 0\,,$$

torej $F_2 = -1/3!$. *Nadaljujemo*

$$\frac{F_0}{5!} + \frac{F_2}{3!} + \frac{F_4}{1!} = 0\,,$$

torej

$$F_4 = \frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\,.$$

Končno dobimo

$$F_6 = -\frac{1}{7!} + \frac{1}{3!\cdot 5!} - \frac{1}{(3!)^3} + \frac{1}{3!\cdot 5!}\,.$$

Pomnožimo še z $6!$ *in dobimo*

$$f^{(6)}(0) = -\frac{1}{7} + 2 - \frac{10}{3} = -\frac{31}{21}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z rekurzijo: 2 točki.*
- F_2*: 2 točki.*
- F_4*: 2 točki.*
- F_6*: 2 točki.*
- *Odvod: 2 točki.*

3. (20) Integriranje.

a. (10) Privzemite, da je za poljuben a

$$\int_0^\infty \cos(ax)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{1+a^2} \quad \text{in} \quad \int_0^\infty \sin(ax)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = \frac{a}{1+a^2}\,.$$

Pokažite, da je za poljuben a

$$\int_0^\infty x\cos(ax)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2}\,.$$

Rešitev: Označimo želeni integral z I in integriramo dvakrat per partes.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty x\cos(ax)e^{-x}\, \mathrm{d}x \\
&= -xe^{-x}\cos(ax)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty (\cos(ax) - ax\sin(ax))\, e^{-x}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1+a^2} - a\int_0^\infty x\sin(ax)e^{-x}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1+a^2} + axe^{-x}\sin(ax)\Big|_0^\infty - a\int_0^\infty (\sin(ax) + ax\cos(ax))e^{-x}\, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1+a^2} - \frac{a^2}{1+a^2} - a^2 I\,.
\end{aligned}$$

Izračunamo

$$(1+a^2)I = \frac{1-a^2}{1+a^2}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Prvo integriranje per partes: 2 točki.*
- *Vstavljanje mej: 2 točki.*
- *Drugo integriranje per partes: 2 točki.*
- *Vstavljanje mej: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_1^\infty \frac{1-\sqrt{x}}{(x+\sqrt{x})^2}\, \mathrm{d}x\,.$$

Rešitev: Uvedemo novo spremenljivko $x = u^2$. Računamo

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1-\sqrt{x}}{(x+\sqrt{x})^2}\, \mathrm{d}x &= \int_1^\infty \frac{2u(1-u)}{(u^2+u)^2}\, \mathrm{d}u \\
&= 2\int_1^\infty \frac{1-u}{u(u+1)^2}\, \mathrm{d}u\,.
\end{aligned}$$

Racionalno funkcijo razstavimo na parcialne ulomke z nastavkom

$$\frac{1-u}{u(u+1)^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} + \frac{C}{(u+1)^2}\,.$$

Pomnožimo z u in pustimo $u \to 0$. Sledi $A = 1$. Pomnožimo z $(u+1)^2$ in pustimo $u \to -1$. Sledi $C = -2$. Razberemo še $B = -1$. Sledi

$$2\int_1^\infty \frac{1-u}{u(u+1)^2}\,\mathrm{d}u = 2\left(\log\left(\frac{u}{u+1}\right) + \frac{2}{1+u}\right)\Bigg|_1^\infty = 2\log 2 - 2\,.$$

Ocenjevanje:

- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Nastavek za parcialne ulomke: 2 točki.*
- *Koeficienti: 2 točki.*
- *Nedoločeni integrali: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Moč klimatske naprave je sorazmerna z razliko med nastavljeno temperaturo T_0 in trenutno temperaturo T. Dotok toplote v prostor pa je sorazmeren razliki med zunanjo temperaturo T_1 in trenutno temperaturo T. Temperaturo T v prostoru opisuje diferencialna enačba

$$T' = -\alpha(T - T_0) + \beta(T_1 - T)$$

za ustrezni pozitivni konstanti α in β.

a. (10) Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe.

Rešitev: Diferencialno enačbo lahko rešujemo kot linearno diferencialno enačbo prvega reda ali pa kot enačbo z ločljivima spremenljivkama. Izberimo si drugi način. Prepišemo

$$\frac{T'}{-(\alpha+\beta)T + \alpha T_0 + \beta T_1} = 1\,.$$

Z integracijo dobimo

$$-\frac{1}{(\alpha+\beta)}\log\Big(-(\alpha+\beta)T + \alpha T_0 + \beta T_1\Big) = t - \frac{\log c}{(\alpha+\beta)}\,,$$

kjer je $c > 0$ poljubna konstanta. Sledi

$$-(\alpha+\beta)T + \alpha T_0 + \beta T_1 = ce^{-(\alpha+\beta)t}\,.$$

Sledi

$$T = \frac{\alpha T_0}{\alpha+\beta} + \frac{\beta T_1}{\alpha+\beta} + Ce^{-(\alpha+\beta)t}\,,$$

kjer je $C = c/(\alpha+\beta)$.

Ocenjevanje:

- *Tip enačbe: 2 točki.*
- *Prepis: 2 točki.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Enačba za T: 2 točki.*
- *Splošna rešitev: 2 točki.*

b. (10) Naj bo začetna temperatura v trenutku $t = 0$ enaka T_2. Poiščite rešitev enačbe in ugotovite, kje se bo ustalila temperatura, ko $t \to \infty$.

Rešitev: V splošni rešitvi vstavimo $t = 0$. Za konstanto C dobimo enačbo

$$T_2 = \frac{\alpha T_0}{\alpha+\beta} + \frac{\beta T_1}{\alpha+\beta} + C\,.$$

Sledi

$$C = T_2 - \frac{\alpha T_0}{\alpha+\beta} - \frac{\beta T_1}{\alpha+\beta}\,,$$

torej

$$T = T_2 e^{-(\alpha+\beta)t} + (1 - e^{-(\alpha+\beta)t})\left(\frac{\alpha T_0}{\alpha+\beta} - \frac{\beta T_1}{\alpha+\beta}\right).$$

Ko $t \to \infty$, temperatura konvergira proti

$$\frac{\alpha T_0}{\alpha+\beta} + \frac{\beta T_1}{\alpha+\beta}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Vstavljanje $t = 0$: 2 točki.*
- *Izračun C: 2 točki.*
- *Pretvarjanje: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*

5. (20) Dana naj bosta vektorja $\mathbf{a}$ in $\mathbf{b}$, taka da je $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \neq -1$. Poiskati želimo vektorja $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$, ki ustrezata enačbama

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\times\mathbf{x}+\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{b}\times\mathbf{y}+\mathbf{x} &= \mathbf{c}\,, \end{aligned}$$

kjer je $\mathbf{c}$ dan vektor.

a. (10) Pokažite, da velja

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\mathbf{x}-(\mathbf{b},\mathbf{x})\,\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{c}\,.$$

Rešitev: Iz prve enačbe izrazimo $\mathbf{y}=\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{x}$ *in vstavimo v drugo enačbo. Dobimo*

$$\mathbf{b}\times(\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{x})+\mathbf{x}=\mathbf{c}\,.$$

Levo stran pretvorimo v

$$\mathbf{b}\times\mathbf{b}+(\mathbf{a}\times\mathbf{x})\times\mathbf{b}=(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\mathbf{x}-(\mathbf{b},\mathbf{x})\,\mathbf{a}\,,$$

kar je že želena enačba.

Ocenjevanje:

- *Ideja izraziti* $\mathbf{y}$ *iz prve enačbe: 4 točke.*
- *Uporaba pravila za* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$*: 4 točke.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izrazite $\mathbf{x}$ in $\mathbf{y}$ z $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ in $\mathbf{c}$.

Namig: Uporabite a., tudi če trditve ne znate dokazati.

Rešitev: Iz a. razberemo, da potrebujemo le še $(\mathbf{b},\mathbf{x})$. *Drugo enačbo pomnožimo skalarno z* $\mathbf{b}$ *in upoštevamo linearnost skalarnega produkta in dejstvo, da je* $\mathbf{b}\times\mathbf{y}$ *pravokoten na* $\mathbf{b}$. *Ostane* $(\mathbf{x},\mathbf{b})=(\mathbf{c},\mathbf{b})$. *Sledi*

$$\mathbf{x}=\frac{\mathbf{c}+(\mathbf{c},\mathbf{b})\,\mathbf{a}}{1+(\mathbf{a},\mathbf{b})}\,.$$

Ko enkrat imamo $\mathbf{x}$ *lahko izrazimo še* $\mathbf{y}$ *iz prve enačbe. Dobimo*

$$\mathbf{y}=\mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{c}}{1+(\mathbf{a},\mathbf{b})}\,.$$

Ocenjevanje:

- *Opažanje, da manjka samo* $(\mathbf{b},\mathbf{x})$*: 2 točki.*
- *Uporaba druge enačbe za izračun* $(\mathbf{b},\mathbf{x})$*: 4 točke.*
- *Izračun* $\mathbf{x}$*: 2 točki.*
- *Izračun* $\mathbf{y}$ *2 točki.*

6. (20) Naj bosta dani matriki

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ a & a & 1 & 1 \\ a^2 & 0 & 1 & 1 \\ -2a & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -a \\ 1 & a & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 & -a-2 \\ 4 & 0 & 2 & a^2 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Poiščite tiste vrednosti $a \in \mathbb{R}$, za katere imata matriki $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$ različen rang.

Rešitev: Za obe matriki izvedemo Gaussov postopek. Obakrat je smiselno najprej zamenjati prvi in tretji stolpec. Računamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & 1 \\ -2 & 0 & -2a & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -a \\ 0 & a & 1 & a+1 \\ 1 & 0 & 0 & -a-2 \\ 2 & 0 & 4 & a^2 \end{pmatrix}. \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -a \\ 0 & a & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+2a \end{pmatrix}.$$

Rang matrike $\mathbf{A}$ je 4, če je a različen od 0 ali 1. Če je $a=0$, je rang enak 2, če je $a=1$, je rang enak 3. Za matriko $\mathbf{B}$ je rang enak 2, če je $a=0$, enak 3, če je $a=-2$ in enak 4, če je a različen od 0 ali -2. Ranga sta različna pri $a=1$ ali $a=-2$.

Ocenjevanje:

- *Gaussov postopek za $\mathbf{A}$: 2 točki.*
- *Gaussov postopek za $\mathbf{B}$: 2 točki.*
- *Rang $\mathbf{A}$ v odvisnosti od a: 2 točki.*
- *Rang $\mathbf{B}$ v odvisnosti od a: 2 točki.*
- *Kdaj sta ranga različna: 2 točki.*

b. (10) Naj bo $a=0$. Poiščite vse vektorje $\mathbf{x}$, za katere velja $\mathbf{Ax} = \mathbf{Bx} = 0$.

Rešitev: Poiščimo najprej vektorje, za katere je $\mathbf{Ax}=0$. Gaussov postopek se ustavi pri

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang matrike je 2, zato bosta prostor rešitev napenjala linearno neodvisna vektorja. Očitno si x_2 in x_3 lahko poljubno izberemo, tako da bodo vse rešitve oblike $(x_1, x_2, 0, 0)$ (Pri Gaussovem postopku smo zamenjali prvi in tretji stolpec, česar se zdaj moramo spomniti!). Če želimo, da velja tudi $\mathbf{Bx}=0$, z množenjem dobimo, da mora veljati $x_1 = 0$, x_2 pa je lahko poljuben. Vsi iskani vektorji bodo oblike $\mathbf{x} = (0, x, 0, 0)$ za poljuben x.

Ocenjevanje:

- *Ideja z jedrom $\mathbf{A}$: 2 točki.*
- *Razsežnost jedra $\mathbf{A}$: 2 točki.*
- *Jedro: 2 točki.*
- *Vstavljanje v $\mathbf{B}$: 2 točki.*
- *Končni $\mathbf{x}$: 2 točki.*