FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1

Pisni izpit

15. junij 2004

Ime in priimek: ______________________ **Vpisna št:** | | | | | | | | |

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge, preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Zaporedja, limite.

a. (10) Zaporedje $x_1, x_2, \ldots$ naj bo dano rekurzivno z $x_1 = \sqrt{5}$ in $x_{n+1} = \sqrt{5x_n}$. Pokažite, da je zaporedje omejeno s 5 in naraščajoče. Sklepajte, da ima limito in jo izračunajte.

Rešitev: Očitno je $x_n > 0$ za vse n. Omejenost dokažemo z matematično indukcijo. Velja $x_1 \leq 5$. Če je $x_n \leq 5$, je

$$x_{n+1} = \sqrt{5x_n} \leq \sqrt{5 \cdot 5} = 5\,.$$

Tudi to, da je zaporedje naraščajoče dokažemo z indukcijo. Očitno je $x_2 > x_1$. Če je $x_n > x_{n-1}$, je tudi

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{5x_n} - \sqrt{5x_{n-1}} > 0\,,$$

torej je $x_{n+1} > x_n$. Vsako omejeno naraščajoče zaporedje ima limito. Označimo

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x\,.$$

Število x mora zadoščati enačbi

$$x = \sqrt{5x}\,.$$

Rešitvi sta 0 in 5, vendar pride v poštev le 5. Sledi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 5\,.$$

Ocenjevanje:

- *Omejenost: 2 točki.*
- *Naraščanje: 2 točki.*
- *Sklep, da limita obstaja: 2 točki.*
- *Enačba za limito: 2 točki.*
- *Limita: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{(1-x^2)\,x^2} - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}\,x^2}\right).$$

Rešitev: Opazimo, da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = 1\,,$$

tako da lahko to limito dodamo na koncu. Poenostavimo

$$\left(\frac{2}{(1-x^2)\,x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}\,x^2}\right) = \frac{2(1-\sqrt{1-x^2})}{(1-x^2)\,x^2}\,.$$

Ker $(1-x^2) \to 1$, *ko* $x \to 0$, *lahko računamo*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2(1-(1-x^2))}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+\sqrt{1-x^2}} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Sledi

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{(1-x^2)\, x^2} - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}\, x^2} \right) = 0\,.$$

Ocenjevanje:

- *Srednji člen odveč: 2 točki.*
- *Poenostavljanje: 2 točki.*
- *Množenje in deljenje (ali L'Hospital): 2 točki.*
- *Vmesna limita: 2 točki.*
- *Končna limita: 2 točki.*

2. (20) Naj bo $0 < a < 1$. Naj bo

$$f(x) = e^{-x} \sinh(ax)\,.$$

Definirajte

$$x_0 = \frac{1}{2a} \log\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\,.$$

a. (10) Pokažite, da je x_0 edina stacionarna točka funkcije $f(x)$ na $\mathbb{R}$.

Namig: Inverzna funkcija hiperboličnega tangensa je

$$g(y) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\,.$$

Rešitev: Odvajamo in dobimo

$$f'(x) = e^{-x}\big(-\sinh(ax) + a\cosh(ax)\big)\,.$$

Stacionarne točke bodo tiste, za katere bo

$$-\sinh(ax) + a\cosh(ax) = 0$$

ali

$$\operatorname{tgh}(ax) = a\,.$$

Inverzna funkcija hiperboličnega tangensa je

$$g(y) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\,,$$

torej mora biti

$$ax = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+a}{1-a}\right)$$

ali

$$x = \frac{1}{2a} \log\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\,.$$

To je edina stacionarna točka, ker je $\operatorname{tgh}(ax)$ *strogo naraščajoča funkcija.*

Ocenjevanje:

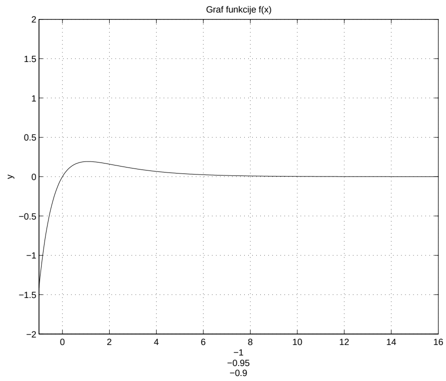
- *Odvod: 2 točki.*
- *Enačba za x: 2 točki.*
- *Definicija hiperboličnih funkcij: 2 točki.*
- *Vstavljanje x_0: 2 točki.*
- *Sklep, da je x_0 edina stacionarna točka.*

b. (10) Utemeljite, da je x_0 maksimum funkcije $f(x)$ na $\mathbb{R}$.

Rešitev: Prepišimo odvod

$$f'(x) = e^{-x}\big(-\sinh(ax) + a\cosh(ax)\big) = e^{-x}\cosh(ax)\big(a - \operatorname{tgh}(ax)\big)\,.$$

Ker je $\operatorname{tgh}(ax)$ *strogo naraščajoča na* $\mathbb{R}$, *je odvod pozitiven na* $(-\infty, x_0)$ *in negativen na* (x_0, ∞). *To pomeni, da je* x_0 *absolutni maksimum. Graf funkcije je na sliki.*



Sl. 1 Graf funkcije $f(x)$.

Ocenjevanje:

- *Ideja, da je sredstvo odvod: 2 točki.*
- *Prepis odvoda: 2 točki.*
- *Monotonost tangensa: 2 točki.*
- *Intervali naraščanja in padanja: 2 točki.*
- *Sklep o absolutnem maksimumu: 2 točki.*

3. (20) Integrali.

a. (10) Kot znano privzemite, da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,.$$

Izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^8\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Namig: $F(x) = x^7$.

Rešitev: Računamo per partes.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x^8\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} x^7 \cdot x e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\
&= -x^7 e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 7\int_{-\infty}^{\infty} x^6\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\
&= 7\Big(- x^5 e^{-x^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + 5\int_{-\infty}^{\infty} x^4\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= 35\int_{-\infty}^{\infty} x^4\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\
&= 105\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\
&= 105\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \\
&= 105 \cdot \sqrt{2\pi}\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja s per partes: 2 točki.*
- *Prvi per partes: 2 točki.*
- *Vstavljanje mej: 2 točki.*
- *Ostali per partes: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2x-1}}\,.$$

Namig: $2x - 1 = u^2$ *in* $1 = 1 - u^2 + u^2$ *v števcu v pravem trenutku.*

Rešitev: Izberimo novo spremenljivko $2x-1=u^2$, *torej* $\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}u$. *Računamo*

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2x-1}} &= \int_1^\infty \frac{4u\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2 u} \\
&= 4\int_1^\infty \frac{(1+u^2-u^2)\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} \\
&= 4\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)} - 2\int_1^\infty \frac{2u^2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} \\
&= \pi - 2\left(-\frac{u}{(1+u^2)}\bigg|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)}\right) \\
&= \pi - 2(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}) \\
&= \frac{\pi}{2} - 1\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Vstavljanje mej: 2 točki.*
- *Prištevanje in odštevanje* u^2*: 2 točki,*
- *Integracija per partes: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Telo vržemo navpično navzgor s površja zemlje. Označimo hitrost telesa v trenutku t z $v(t)$. Ko bo telo začelo padati nazaj proti zemlji, bo hitrost negativna. Ob upoštevanju zračnega upora, bo hitrost telesa opisovala diferencialna enačba

$$m\dot{v} = -mg - kv\,,$$

kjer je m masa telesa, g zemeljski pospešek in k konstanta.

a. (10) Poiščite rešitev enačbe, ki ustreza začetnemu pogoju $v(0) = v_0 > 0$.

Rešitev: Enačba je nehomogena linearna prvega reda. Homogena rešitev je $v(t) = e^{-kt/m}$. *Za nehomogeno enačbo poskusimo s konstanto. Hitro se prepričamo, da je konstanta* $-mg/k$ *partikularna rešitev enačbe. Splošna rešitev bo torej*

$$v(t) = -\frac{mg}{k} + ce^{-kt/m}$$

za neko konstanto c. *Ustreči moramo še začetnemu pogoju, torej*

$$v_0 = v(0) = -\frac{mg}{k} + c\,.$$

Sledi

$$v(t) = v_0 e^{-kt/m} - \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m})\,.$$

Ocenjevanje:

- *Homogeni del: 2 točki.*
- *Partikularna rešitev: 2 točki.*
- *Upoštevanje začetnega pogoja: 2 točki.*
- *Konstanta: 2 točki.*
- *Rešitev: 2 točki.*

b. (10) Kako visoko bo telo, ko bo doseglo najvišjo točko svoje trajektorije?

Namig: V trenutku t *bo telo na višini* $\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s$. *Kolikšna bo v tistem trenutku histrost telesa?*

Rešitev: Označimo z $x(t)$ *oddaljenost telesa od površja zemlje v trenutku* $t \geq 0$. *Ker poznamo hitrost telesa, lahko zapišemo*

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \left(v_0 e^{-ks/m} - \frac{mg}{k}(1 - e^{-ks/m})\right)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-kt/m}) - \frac{mg}{k}\left(t - \frac{m}{k}(1 - e^{-kt/m})\right) \\
&= \frac{kmv_0 + mg}{k^2}(1 - e^{-kt/m}) - \frac{mgt}{k}\,.
\end{aligned}$$

Označimo trenutek, ko bo telo najvišje, s t_0. *Hitrost v tem trenutku bo enaka 0, torej mora veljati*

$$0 = v_0 e_0^{-kt_0/m} - \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt_0/m})\,.$$

Sledi

$$e^{-kt_0/m}(v_0 + \frac{mg}{k}) = \frac{mg}{k}$$

ali

$$t_0 = \frac{m}{k} \log\left(\frac{v_0 k + mg}{mg}\right) .$$

Najvišja točka bo torej

$$\frac{kmv_0 + mg}{k^2}(1 - e^{-kt_0/m}) - \frac{mgt_0}{k} = \frac{mv_0}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \log\left(\frac{v_0 k + mg}{mg}\right) .$$

Ocenjevanje:

- *Integriranje: 2 točki.*
- *Enačba za t_0: 2 točki.*
- *t_0: 2 točki.*
- *Ideja z vstavljanjem t_0: 2 točki.*
- *Največja višina: 2 točki.*

5. (20) Naj bosta $\mathbf{e}$ in $\mathbf{x}$ enotska vektorja v prostoru, ki nista kolinearna.

a. (10) Definirajte vektor $\mathbf{y}$ kot linearno kombinacijo $\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}) + \mu(\mathbf{e} \times \mathbf{x})$. Izrazite dolžino vektorja $\mathbf{y}$ in mešani produkt $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e})$ z λ, μ in $(\mathbf{e}, \mathbf{x})$.

Rešitev: Ker sta $\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}$ *in* $\mathbf{e} \times \mathbf{x}$ *pravokotna, dolžino vektorja* $\mathbf{y}$ *izračunamo kot*

$$\begin{aligned}
(\mathbf{y}, \mathbf{y}) &= \lambda^2(\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}, \mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}) + \mu^2(\mathbf{e} \times \mathbf{x}, \mathbf{e} \times \mathbf{x}) \\
&= \lambda^2(1 - (\mathbf{e}, \mathbf{x})^2) + \mu^2(1 - (\mathbf{e}, \mathbf{x})^2) \\
&= (\lambda^2 + \mu^2)(1 - (\mathbf{e}, \mathbf{x})^2)\,.
\end{aligned}$$

Za izračun $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e})$ *vstavimo* $\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}) + \mu(\mathbf{e} \times \mathbf{x})$. *Če uporabimo linearnost mešanega produkta v vsaki spremenljivki, dobimo, da je*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}) = (\mathbf{x}, \mu(\mathbf{e} \times \mathbf{x}), \mathbf{e})\,.$$

Računamo

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}) &= (\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}) + \mu(\mathbf{e} \times \mathbf{x}), \mathbf{e}) \\
&= \mu(\mathbf{x}, \mathbf{e} \times \mathbf{x}, \mathbf{e}) \\
&= -\mu(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \mathbf{e} \times \mathbf{x}) \\
&= \mu(\mathbf{e}, \mathbf{x}, \mathbf{e} \times \mathbf{x}) \\
&= \mu(\mathbf{e} \times \mathbf{x}, \mathbf{e} \times \mathbf{x}) \\
&= \mu(1 - (\mathbf{e}, \mathbf{x})^2)\,.
\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z* $(\mathbf{y}, \mathbf{y})$*: 2 točki.*
- *Izračun: 2 točki.*
- *Ideja z menjavanjem vrstnega reda: 2 točki.*
- *Izpostavljanje* μ*: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Poiščite vektor $\mathbf{y}$ dolžine $\sqrt{1 - (\mathbf{e}, \mathbf{x})^2}$, ki je pravokoten na $\mathbf{e}$, oklepa kot $\pi/4$ z vektorjem $\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}$ in velja $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}) > 0$.

Namig: Iskani vektor lahko izrazite kot linearno kombinacijo vektorjev $\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}$ *in* $\mathbf{e} \times \mathbf{x}$.

Rešitev: Vektorja $\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}$ *in* $\mathbf{e} \times \mathbf{x}$ *napenjata ravnino, ki j pravokotna na* $\mathbf{e}$, *zato lahko iščemo vektor* $\mathbf{y}$ *z nastavkom*

$$\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}) + \mu(\mathbf{e} \times \mathbf{x})\,.$$

Po a. je dolžina vektorja $\mathbf{y}$ *enaka*

$$\sqrt{(\lambda^2 + \mu^2)(1 - (\mathbf{e}, \mathbf{x})^2)}\,.$$

Veljati mora torej

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1\,.$$

Vektor $\mathbf{y}$ *mora z* $\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}$ *oklepati kot* $\pi/4$. *To pomeni, da mora biti*

$$\frac{(\mathbf{y}, \mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e})}{|\mathbf{y}|\,|\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Vstavimo $\mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e}) + \mu(\mathbf{e} \times \mathbf{x})$ *in sledi*

$$\frac{\lambda(1 - (\mathbf{e}, \mathbf{x})^2)}{1 - (\mathbf{e}, \mathbf{x})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

torej $\lambda = \sqrt{2}/2$. *Posledično je* $\mu = \pm\sqrt{2}/2$. *Po a. je še*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{e}) = \mu(\mathbf{e} \times \mathbf{x}, \mathbf{e} \times \mathbf{x})\,.$$

Sledi $\mu > 0$. *Iskani vektor je*

$$\mathbf{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}\big(\mathbf{x} - (\mathbf{e}, \mathbf{x})\,\mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{x}\big)\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja z* $(\mathbf{y}, \mathbf{y})$*: 2 točki.*
- *Izračun dolžine* $\mathbf{y}$*: 2 točki.*
- *Formula za kosinus kota: 2 točki.*
- *Konstanta* λ*: 2 točki.*
- *konstanta* μ*: 2 točki.*

6. (20) Matrika $\mathbf{X}(2 \times 2)$ ustreza enačbi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} - \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

a. (10) Poiščite matriko X.

Namig: Zapišite

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

in prepišite enačbo s temi oznakami.

Rešitev: Zapišimo

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} .$$

Z temi oznakami zgornjo enačbo lahko prepišemo v sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_2 & + & & + & x_3 & + & x_4 & = & -1 \end{array} .$$

Po Gaussovem postopku predelamo razširjeno matriko v

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Iz tega razberemo, da je rešitev

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

Ocenjevanje:

- *Množenje matrik: 2 točki.*
- *Prepis v sistem: 2 toyki.*
- *Gaussov postopek: 2 točki.*
- *Reševanje sistema: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Je z zgornjo enačbo matrika $\mathbf{X}$ enolično določena?

Rešitev: Rang matrike sistema linearnih enačb je enak 4, torej je dimenzija jedra matrike sistema linearnih enačb enaka 0. Sistem je enolično rešljiv.

Ocenjevanje:

- *Ustrezna utemeljitev: 10 točk.*