

FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika I

Pisni izpit

16. september, 1996

Ime in priimek: _____ *Letnik:* _____

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 8, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri in pol (150 min).

Naloga	a.	b.	Skupaj
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
Skupaj			

1. (20) Zaporedje realnih števil x_1, x_2, \dots je podano z rekurzijsko formulo

$$x_1 = 1/(2a) \quad \text{in} \quad x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2.$$

- a. (10) Dokažite z matematično indukcijo, da je $0 < x_n < 1/a$ za vse $n \geq 1$.

Namig: $(2u - au^2) \in (0, 1/a)$ za $u \in (0, 1/a)$.

- b. (10) Privzemite, da je $0 < x_n < 1/a$ za vse $n \geq 1$. Dokažite, da zaporedje x_1, x_2, \dots ima limito in jo izračunajte.

2. (20) Limiti, L'Hospitalovo pravilo:

a. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x + x^2)}{x^2}.$$

b. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + e^x)}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

3. (20) Naj bo funkcija $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ strogo naraščajoča in strogo pozitivna z zalogo vrednosti $[A, B]$. Označite z $g(y)$ inverzno funkcijo funkcije $f(x)$ na intervalu $[A, B]$.

a. (10) Izrazite z $g(y)$ inverzno funkcijo funkcije $\log(f(x))$ in izračunajte odvod te inverzne funkcije.

b. (10) Izrazite z $g(y)$ inverzno funkcijo funkcije $f(e^x)$ na intervalu $[\log a, \log b]$ ($a, b > 0$) in izračunajte odvod te inverzne funkcije.

4. (20) Taylorjev polinom:

- a. (10) Naj bo $f(x)$ v okolici točke $x_0 = 0$ $(n + 1)$ -krat zvezno odvedljiva in naj bo $T_n(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n c_k x^k$ njen Taylorjev polinom n -te stopnje. Z uporabo Leibnizove formule pokažite, da je Taylorjev polinom n -te stopnje funkcije $g(x) = e^x f(x)$ enak $\tilde{T}_n(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n a_k x^k$, kjer je

$$a_k = \frac{c_0}{k!} + \frac{c_1}{(k-1)!} + \frac{c_2}{(k-2)!} + \dots + c_{k-1} + c_k .$$

- b. (10) Najdite koeficiente v Taylorjevem polinomu n -te stopnje za funkcijo $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$.
Namig: Uporabite a., tudi če formule ne znate izpeljati.

5. (20) Predpostavite, da pri vožnji s konstantno hitrostjo v porabimo na časovno enoto $g + cv^2$ enot goriva. Prvi sumand je konstanten, drugi pa je odvisen od zračnega upora, za katerega predpostavljamo, da je sorazmeren s kvadratom hitrosti.

a. (10) S kakšno konstantno hitrostjo se moramo peljati, da bomo za dano razdaljo d porabili najmanjšo možno količino goriva? Prepričajte se, da ste našli minimum.

b. (10) Kakšna je rešitev, če je zračni upor sorazmeren s hitrostjo, torej, če je poraba goriva na časovno enoto enaka $g + cv$?

6. (20) Uvedba nove spremenljivke, racionalne funkcije:

a. (10) Z razcepom na parcialne ulomke izračunajte integral

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(1+x)^3}.$$

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^3(x)}{\cos^2(x)} dx.$$

Namig: Uvedite novo spremenljivko.

7. (20) Integracija per partes, algebraične funkcije.

a. (10) Z uvedbo nove spremenljivke in integracijo per partes izračunajte integral

$$\int_0^1 x^2 \arcsin^2(x) dx .$$

b. (10) Izračunajte integral

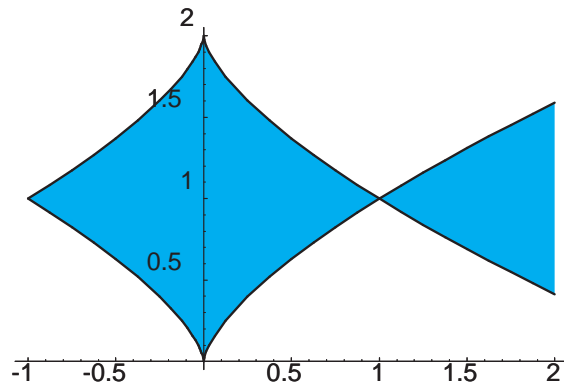
$$\int_{-a}^a \frac{dx}{\cosh(x)} ,$$

kjer je $a = 2 \log(2 + \sqrt{3})$.

8. (20) Funkciji f in g naj bosta podani z

$$f(x) = |x|^\alpha \quad \text{in} \quad g(x) = 2 - |x|^\alpha$$

za $0 < \alpha < 1$.



a. (10) Izračunajte ploščino lika omejenega z grafoma funkcij f in g na intervalu $[-1, 1]$.

b. (10) Izračunajte ploščino lika med grafoma funkcij f in g na intervalu $[1, 2]$.