FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika I

Pisni izpit

6. september, 1996

Ime in priimek: ______________________________ ***Letnik:*** ____________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 8, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 3 ure.

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			

Skupaj			

1. (20) Zaporedje realnih števil $x_1, x_2, \ldots$ je podano z rekurzijsko formulo

$$x_1 = 1/(2\sqrt{a}) \qquad \text{in} \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}(3x_n - ax_n^3) \quad a > 0\,.$$

a. (10) Dokažite z matematično indukcijo, da je $0 < x_n < 1/\sqrt{a}$ za vse $n \geq 1$.
Namig: $(3x - ax^3) \in (0, 2/\sqrt{a})$ *za* $0 < x < 1/\sqrt{a}$.

b. (10) Privzemite, da je $0 < x_n < 1/\sqrt{a}$ za vse $n \geq 1$. Dokažite, da zaporedje $x_1, x_2, \ldots$ ima limito in jo izračunajte.

2. (20) Limiti, L'Hospitalovo pravilo:

a. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - xe^{x/2}}{x^3}\,.$$

b. (10) Izračunajte limito

$$\lim_{x\to\pi/4} (\mathrm{tg}(x))^{\mathrm{tg}(2x)}\,.$$

3. (20) Hiperbolični kotangens je definiran kot

$$\operatorname{ctgh}(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}\,.$$

a. (10) Na intervalu $(0, \infty)$ je hiperbolični kotangens monotona funkcija in ima torej inverzno funkcijo. Zapišite inverzno funkcijo hiperboličnega kotangensa in izračunajte njen odvod.

b. (10) Izračunajte odvod funkcije

$$\operatorname{ctgh}(\log(x + \sqrt{x^2 + 1}))\,.$$

Kaj lahko ugotovite, če ta odvod primerjate z odvodom funkcije $\sqrt{1 + x^2}/x$?

4. (20) Taylorjev polinom:

a. (10) Funkcija $f(x)$ naj bo dana s formulo

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2} \,.$$

Zapišite Taylorjev polinom n–te stopnje za v točki $x_0 = 1$ za funkcijo $f(x)$.
Namig: Uporabite posplošeno binomsko formulo.

b. (10) Izračunajte četrti odvod zgornje funkcije v točki $x_0 = 0$.

5. (20) Kamen z maso m, ki ga vržemo z začetno hitrostjo v pod kotom α glede na vodoravno podlago, bo letel po zraku $t = 2v \sin \alpha / g$ časovnih enot, kjer je g zemeljski pospešek.

a. (10) Kakšen kot moramo izbrati, da bomo kamen vrgli najdlje v vodoravni smeri.
Namig: Upoštevajte, da je hitrost v vodoravni smeri konstantna in enaka $v \cos \alpha$.

b. (10) Pokažite, da ste v **a.** res našli maksimum.

6. (20) Uvedba nove spremenljivke, racionalne funkcije:

a. (10) Z uvedbo nove spremenljivke izračunajte integral

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^3(x)\sin(x)} =$$

b. (10) Z razcepom na parcialne ulomke izračunajte

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(2+x)(3+x)(4+x)}\,.$$

Namig: Polinom v imenovalcu nima večkratnih ničel.

7. (20) Integracija per partes, racionalne funkcije.

a. (10) Dokažite z integracijo per partes, da je za celi števili $m, n \geq 2$

$$\int_0^\pi \sin^m(x)\cos^n(x)dx = \frac{n-1}{m+1}\int_0^\pi \sin^{m+2}(x)\cos^{n-2}(x)\mathrm{d}x\,.$$

Namig: $\cos^n(x) = \cos(x)\cos^{n-1}(x)$.

b. (10) Izračunajte integral

$$\int_2^4 \sqrt{\frac{x}{x-1}}\mathrm{d}x\,.$$

8. (10) Ploščine ravninskih likov:

a. (10) Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij $\cos^2(x)$ in $\sin^2(x)$ na intervalu $[0, \pi/4]$ in ordinatna os.

b. (10) Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta grafa funkcij $\cos^3(x)$ in $\sin^3(x)$ na intervalu $[0, \pi/4]$ in ordinatna os.

Namig: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.