FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO

Matematika 1 & 2

Pisni izpit

15. september 1998

Ime in priimek: ______________________ **Letnik:** __________

Navodila

Pazljivo preberite besedilo naloge preden se lotite reševanja. Veljale bodo samo rešitve na papirju, kjer so naloge. Nalog je 6, vsaka ima dva dela, ki sta vredna po 10 točk, torej skupaj 20 točk. Na razpolago imate 2 uri (120 min).

Naloga	**a.**	**b.**	**Skupaj**
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			
6.			
Skupaj			

1. (20) Funkcija $f(x)$ naj za vse $x \in \mathbb{R}$ ustreza enačbi

$$f'(x) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(f(x))}\,,$$

pri čemer je $|k| < 1$ dana konstanta. Dano je tudi $f(0) = 0$.

a. (10) Izračunajte $f^{(3)}(0)$.

Rešitev: Vstavimo najprej $x = 0$ v zgornjo enačbo. Dobimo $f'(0) = 1$. Zgornjo enačbo odvajamo na obeh straneh. Dobimo

$$f''(x) = \frac{-k^2 \sin(f(x)) \cos(f(x)) f'(x)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(f(x))}}\,.$$

Če vstavimo $x = 0$, dobimo $f''(0) = 0$. Odvajajmo na vsaki strani še enkrat. Dobimo

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= -k^2 \frac{\Big((\cos^2(f(x)) - \sin^2(f(x))\Big)(f'(x))^2 + \sin(f(x))\cos(f(x)) f''(x)) \cdot f'(x)}{1 - k^2 \sin^2(f(x))} + \\ & \quad k^2 \frac{\sin(f(x))\cos(f(x)) f'(x) \cdot f''(x)}{1 - k^2 \sin^2(f(x))}\,. \end{aligned}$$

Vstavimo $x = 0$ in dobimo

$$f^{(3)}(0) = -k^2\,.$$

Ocenjevanje:

- *Ideja o odvajanju na obeh straneh: 4 točke.*
- *Prvo odvajanje: 2 točki.*
- *Drugo odvajanje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Funkcija $f(x)$ je naraščajoča, zato ima inverzno funkcija $g(y)$. Izračunajte $g'(0)$.

Rešitev: Po formuli za odvod inverzne funkcije je

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))}\,.$$

Iz besedila naloge sledi $g(0) = 0$ in $f'(0) = 1$. Rezultat: $g'(0) = 1$.

Ocenjevanje:

- *Formula za odvod inverzne funkcije: 3 točke.*
- *Izračun $g(0)$: 3 točke.*
- *Pravilno vstavljanje v formulo: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

2. (20) Integriranje:

a. (10) Izračunajte integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2-1}{(1+x^2)(1+x+x^2)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Rešitev: Najprej funkcijo pod integralom razstavimo na parcialne ulomke.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-1}{(1+x^2)(1+x+x^2)} &= \frac{Ax+B}{1+x^2}+\frac{Cx+D}{1+x+x^2}\\ &= \frac{(Ax+B)(1+x+x^2)+(Cx+D)(1+x^2)}{(1+x^2)(1+x+x^2)}\\ &= \frac{(A+C)x^3+(A+B+D)x^2+(A+B+C)x+(B+D)}{(1+x^2)(1+x+x^2)}\end{aligned}$$

Iz zgornjih enačb razberemo najprej $A+C=0$. Iz koeficienta pri x sledi potem $B=0$. Iz $B+D=-1$ sledi potem $D=-1$ in iz koeficienta pri x^2 sledi, da je $A=2$, torej $C=-2$. Integral prepišemo v

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{x^2-1}{(1+x^2)(1+x+x^2)}\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}\left(\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x+1}{1+x+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \Big(\log(1+x^2)-\log(1+x+x^2)\Big)\Big|_{-1}^{1}\\ &= -\log(3)\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek za parcialne ulomke: 2 točki.*
- *Določitev konstant: 2 točki.*
- *Prvi integral: 2 točki.*
- *Drugi integral: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

b. (10) Pokažite, da za $a>0$ velja

$$\int_0^1 \frac{e^{-a/x}}{\sqrt{x^{3/2}(1-x)}}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-a}\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,.$$

Uporabite kot znano, da je $\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$.

Namig: Začnite z $1/x=u$.

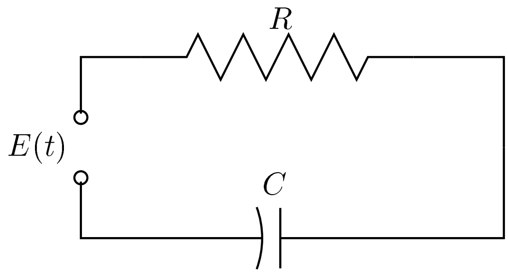
Rešitev: Uvedemo novo spremenljivko $1/x=u$, torej $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u/u^2$. Računamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{-a/x}}{\sqrt{x^3(1-x)}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^\infty \frac{e^{-au}}{\sqrt{u-1}}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-a(1+v)}}{\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v \qquad \textit{nova spremenljivka } u-1=v\\ &= \frac{e^{-a}}{\sqrt{a}}\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \textit{nova spremenjivka } av=t\\ &= \frac{e^{-a}\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nova spremenljivka na prvem koraku: 2 točki.*
- *Meje in parvilna uvedba nove spremenljivke: 2 točki.*
- *Druga nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Tretja nova spremenljivka: 2 točki.*
- *Upoštevanje znanega rezultata: 2 točki.*

3. (20) Kirchoffov zakon pravi, da je vsota padcev napetosti v vsakem zaključenem krogu enaka 0. Naj $I(t)$ označuje tok v tokokrogu na sliki. Padec napetosti na uporu je RI, kjer je R upor, kondenzator s kapaciteto C pa izvaja napetost sorazmerno z nabojem.



Iz Kirchhoffovega zakona lahko izpeljemo, da je

$$RI'(t) + \frac{1}{C} I(t) = E'(t)\,.$$

a. (10) Predpostavljajte, da je napetost $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$. Poiščite funkcijo $I(t)$ pri pogoju, da je $I(0) = 0$.

Rešitev: V tem primeru iščemo rešitev nehomogene enačbe

$$I' + \frac{1}{CR} I = \frac{E_0 \omega}{R} \cos(\omega t)\,.$$

Najprej rešimo homogeno enačbo. Dobimo rešitev

$$I_0(t) = e^{-t/CR}\,.$$

Rešitev nehomogene iščemo z nastavkom $y = u \cdot I_0$. Vemo, da mora funkcija u ustrezati enačbi

$$u'(t) = \frac{E_0 \omega}{R} e^{t/CR} \cos(\omega t)\,.$$

S pomočjo integracije per partes moramo izračunati integral

$$\begin{aligned}\int e^{t/CR} \cos(\omega t)\ \mathrm{d}t &= CRe^{t/CR} \cos(\omega t) + CR\omega \int e^{t/CR} \sin(\omega t)\ \mathrm{d}t \\ &= CRe^{t/CR} \cos(\omega t) + CR\omega \Big(CRe^{t/CR} \sin(\omega t) - \\ &\quad - CR\omega \int e^{t/CR} \cos(\omega t)\,; \mathrm{d}t \Big)\end{aligned}$$

Iz tega izračunamo

$$(1 + C^2R^2\omega^2) \int e^{t/CR} \cos(\omega t)\ \mathrm{d}t = CRe^{t/CR} \cos(\omega t) + C^2R^2\omega e^{t/CR} \sin(\omega t)$$

torej

$$\int e^{t/CR} \cos(\omega t)\ \mathrm{d}t = \frac{CR}{1 + C^2R^2\omega^2} e^{t/CR} (\cos(\omega t) + CR\omega \sin(\omega t))\,.$$

Splošna rešitev enačbe je

$$I(t) = I_0(t) \cdot u(t) + cI_0(t) = \frac{CE_0\omega}{1 + C^2R^2\omega^2} (\cos(\omega t) + CR\omega \sin(\omega t)) + ce^{-t/CR}\,.$$

Iz začetnega pogoja moramo določiti še konstanto c. Dobimo

$$I(0) = \frac{CE_0\omega}{1 + C^2R^2\omega^2} + c = 0$$

ali

$$c = -\frac{CE_0\omega}{1 + C^2R^2\omega^2}\,.$$

Rešitev diferencialne enačbe je

$$I(t) = \frac{CE_0\omega}{1 + C^2R^2\omega^2}(\cos(\omega t) + CR\omega\sin(\omega t) - e^{-t/CR})\,.$$

Ocenjevanje:

- *Rešitev homogene enačbe: 2 točki.*
- *Nastavek za nehomogeno enačbo: 2 točki.*
- *Prvo integriranje per partes: 2 točki.*
- *Drugo integriranje per partes: 2 točki.*
- *Konstanta c: 2 točki.*

b. (10) Predpostavite, da je $E(t) = E_0$, torej napetost je konstantna in $I(0) = I_0 > 0$. Izračunajte naboj $Q(t)$ v kondenzatorju po času t.

Namig: Naboj po času t je $Q(t) = \int_0^t I(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

Rešitev: Če je napetost konstantna, je enačba za $I(t)$ *homogena za rešitvijo*

$$I(t) = ce^{-t/RC}\,.$$

Iz začetnega pogoja izračunamo

$$c = I_0\,.$$

Naboj $Q(t)$ *potem dobimo z integracijo*

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_0^t I(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= I_0\int_0^t e^{-\tau/RC}\,\mathrm{d}\tau \\ &= -I_0RCe^{-\tau/RC}\Big|_0^t \\ &= I_0RC(1 - e^{-t/RC}) \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Rešitev homogene enačbe: 3 točke.*
- *Konstanta c: 3 točke.*
- *Integriranje: 2 točki.*
- *Rezultat: 2 točki.*

4. (20) Dani naj bodo vektorji

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Poiščite vektor $\mathbf{x}$ dolžine 1, ki je pravokoten na ravnino, ki jo določajo točke $T_1(1,1,1)$, $T_2(-1,0,1)$ in $T_3(0,2,0)$ in je $(\mathbf{a},\mathbf{x}) > 0$.

Rešitev: Vektor $\mathbf{x}$ *mora biti pravokoten na* $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ *in* $\mathbf{b} - \mathbf{c}$*, torej je oblike*

$$\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

za primerno konstanto λ*. Vektor mora biti dolžine* 1*, zato je* $|\lambda| = 1/\sqrt{14}$*. Iz* $(\mathbf{a},\mathbf{x}) > 0$ *sledi še, da je* $\lambda \cdot (-4) > 0$ *ali* $\lambda < 0$*. Sledi*

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ocenjevanje:

- *Ugotovitev, da je* $\mathbf{x}$ *kolinearen vektroskemu produktu: 4 točke.*
- *Izračun absolutne vrednosti* λ*: 2 točki.*
- *Izračun predznaka* λ*: 2 točki.*
- *Končni rezultat: 2 točki.*

b. (10) Izračunajte pravokotno projekcijo vektorja $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ na vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$.

Rešitev: Po formuli za pravokotno projekcijo vektorja na dan vektor je iskani rezultat enak

$$\frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{c})}{(\mathbf{a} \times \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{c})} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{c}\,.$$

Posamezne skalarne produkte lahko izračunamo po Lagrangeovi identiteti.

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{c}) - (\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{a}) = 0\,.$$

Pravokotna projekcija je enaka 0.

Ocenjevanje:

- *Formula za pravokonto projekcijo: 3 točke.*
- *Izračun posameznih skalarnih produktov: 3 točke.*
- *Rezultat: 4 točke.*

5. (20) Matrika $\mathbf{C}$ naj bo oblike

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & a \\ a & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

kjer je a poljubno število.

a. (10) Izračunajte $\operatorname{rang}(\mathbf{C})$, če je $a = 0$.

Rešitev: Uporabimo Gaussov postopek.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Rang matrike je 3.

Ocenjevanje:

- *Gaussov postopek: 5 točk.*
- *Sklep: 5 točk.*

b. (10) Ali lahko izberete a tako, da bo $\operatorname{rang}(\mathbf{C}) = 2$.

Rešitev: Naloge se lotimo z Gaussovim postopkom.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & a \\ a & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 4 - a/2 & -1 + 3a/2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & -1 + 3a/2 - a(4 - a/2)/3 \end{pmatrix}.$$

Rang matrike bo 2, *če bo* $-1 + 3a/2 - a(4 - a/2)/3 = (a+3)(a-2)/6 = 0$. *Rešitvi sta torej dve:* $a = -3$ *in* $a = 2$.

Ocenjevanje:

- *Prvi korak Gaussovega postopka: 3 točke.*
- *Drugi korak Gaussovega postopka: 3 točke.*
- *Prva rešitev za a: 2 točki.*
- *Druga rešutev za a: 2 točki.*

6. (20) Dana naj bo matrika

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. (10) Izračunajte lastne vrednosti matrike $\mathbf{A}$.

Rešitev: Najprej izračunamo karakteristični polinom po Sarrusovem pravilu. Zapišemo

$$\begin{array}{rrrrr} -2-\lambda & 2 & -3 & -2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda & -6 & 2 & 1-\lambda \\ -1 & -2 & -\lambda & -1 & -2 \end{array}$$

Dobimo

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (2+\lambda)(1-\lambda)\lambda + 12 + 12 - 3(1-\lambda) + 12(2+\lambda) + 4\lambda \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 21\lambda + 45 \\ &= -(\lambda+3)^2(\lambda-5) \end{aligned}$$

Ocenjevanje:

- *Nastavek za determinanto: 3 točke.*
- *Izračun karakterističnega polinoma: 3 točke.*
- *Lastne vrednosti: 4 točke.*

b. (10) Ali ima matrika $\mathbf{A}$ tri neodvisne lastne vektorje? V primeru, da jih ima, jih poiščite.

Rešitev: Vemo, da lastni vrednosti $\lambda = 5$ pripada lastni vektor $\mathbf{x}$, ki mora zadoščati sistemu enačb

$$\begin{array}{rcrcrcl} -7x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Izberimo si recimo $x_3 = -1$. Enačbe se poenostavijo v

$$\begin{array}{rcrcl} -7x_1 & + & 2x_2 & = & -3 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & = & -6 \end{array}$$

Rešitev je $\mathbf{x} = (1, 2, -1)$. Prepričati se moramo še, da lastni vrednosti $\lambda = -3$ pripadata dva linearno neodvisna lastna vektorja. To je enako kot pokazati, da ima matrika $\mathbf{A} + 3\mathbf{I}$ rang 1. Uporabimo Gaussov postopek

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ko iščemo lastna vektorja $\mathbf{y}$ in $\mathbf{z}$, ki pripadata lastni vrednosti $\lambda = -3$, si zadnji dve komponenti poljubno izberemo. Izberimo najprej, da sta 1 in 0. Dobimo $\mathbf{y} = (-2, 1, 0)$. Izberimo še, da sta zadnji komponenti 0 in 1. Dobimo $\mathbf{z} = (3, 0, 1)$

Ocenjevanje:

- *Lastni vektor, ki pripada $\lambda = 5$: 2 točki.*
- *Ugotovitev, da mora biti rang $\mathbf{A} + 3\mathbf{I}$ enak 1: 2 točki.*
- *Neodvisna lastna vektorja: 4 točke.*
- *Utemeljitev, da so vsi lastni vektorji neodvisni: 2 točki.*